# La musique au carrefour des mathématiques, des sciences et des arts

**Anne Boyé,**
professeure, lycée de Grand Air, La Baule ; IREM Pays de Loire

## I. Introduction

L'idée de cet atelier est née de questions lors de l'animation de stages sur les travaux personnels encadrés (TPE). Les enseignants avaient des difficultés à imaginer des sujets dans lesquelles les mathématiques n'apparaîtraient pas seulement comme discipline de service. La plupart du temps, dans ce cas, le niveau demandé était alors très au-dessus de celui d'un élève de première. Je suggérais alors la musique, ce qui ne manquait pas d'étonner : musique et physique, certes, mais les mathématiques ?

Cet étonnement s'est retrouvé, avec plus de force encore, lors de journées de formation en deuxième année d'Iufm.

Il suffit souvent de proposer quelques textes simples et évocateurs, pour qu'une réflexion démarre. Ce fut l'objet de cet atelier. Il ne s'agit pas ici de faire une histoire complète des théories de la musique, ni d'entrer dans le détail du phénomène musical, mais de donner quelques éléments qui permettront d'aller plus loin et qui ont fait l'objet de la discussion pendant l'atelier. Trois points de vue seront abordés : le point de vue des mathématiques, le point de vue de la physique, et le point de vue de la physiologie. Il reste bien sûr ceux de l'esthétique, de l'art, qui sont évidemment essentiels, mais qui viennent plus facilement à l'idée. Comme on peut s'en douter, il en a été question lors de l'atelier, mais ils peuvent être éclairés par la connaissance des trois autres.

Ce programme est presque parfaitement résumé dans le chapitre I du Tentamen novae theoriae musicae[1] de L. Euler, "Du son et de l'ouïe" :

"Notre dessein étant de traiter la musique comme on traite les sciences exactes, où il n'est permis de rien avancer dont la vérité ne puisse être démontrée par ce qui précède, nous devons avant tout exposer la doctrine du son et de l'ouïe : la première fournit la matière de la musique, et la seconde en embrasse le but et la fin qui est de charmer l'oreille ; car la musique enseigne comment il faut produire et combiner les sons pour qu'il en résulte une harmonie qui affecte agréablement le sens de l'ouïe. La nature des sons, leur formation et leurs variétés, voilà donc ce qu'il faut que nous examinions ; et c'est dans la physique et dans les mathématiques que nous puiserons les moyens d'en acquérir une connaissance suffisante. Si à cette connaissance nous ajoutons ensuite celle des principaux organes de l'ouïe, nous comprendrons comment se fait la perception des sons. On sentira facilement quel avantage on tirera de ces notions pour établir avec solidité les bases de la musique, si l'on réfléchit que l'agrément qu'on trouve dans les sons, dépend de la manière dont on les perçoit, et que par conséquent c'est là qu'il faut en chercher l'explication." [10].

## II. Le point de vue des mathématiques

Pourrait-on dire que la musique, du moins occidentale, n'aurait pas existé sans les mathématiques ? Rappelons qu'au moyen âge, les quatre "arts mathématiques", désignés par le quadrivium, comportaient l'arithmétique, la musique, la géométrie et l'astronomie.

Un peu plus tard, sans que cette tradition ait vraiment perduré, les mathématiques transparaissent de façon persistante dans la musique, au moins pour tout ce qui concerne la théorie. Ecoutons plutôt Jean-Philippe Rameau :

"Nonobstant toute l'expérience que je pouvais m'être acquise dans la musique pour l'avoir pratiquée pendant une assez longue suite de temps, ce n'est cependant que par le secours des mathématiques que mes idées se sont débrouillées, et que la lumière y a succédé à une certaine obscurité dont je ne m'apercevais pas auparavant." [18].

Ce sentiment n'est pas, pour autant, partagé totalement par d'autres. Dans les faits, si les mathématiques sont le fondement de la théorie musicale, déjà chez les grecs anciens, nous en reparlerons, certains comme par exemple Aristoxène, s'élevaient contre le "tout mathématique" dans la musique, contre le dogme du nombre des pythagoriciens.

Comme en toute chose, il est souvent bon de trouver un juste équilibre. En musique, en particulier, il y a la théorie et l'usage que l'on peut en faire pour construire une œuvre d'art. C'est ce que D'Alembert exprime dans son introduction à "Eléments de musique selon les principes de M. Rameau", en 1752 :

"La considération des rapports est sans doute nécessaire à quelques égards dans la musique pour la composition des sons entre eux ; (…) mais la considération des rapports est illusoire pour rendre raison du plaisir que la musique nous cause." [6].

Quoiqu'il en soit, nous retrouvons en théorie de la musique la plupart des grands noms des mathématiques : Galilée, Descartes, Leibniz, Huygens, Euler, déjà cité, D'Alembert, …

Examinons les choses d'un peu plus près. La musique occidentale repose sur la notion de gammes, qui définissent les sons que l'on peut employer dans son écriture, puis sur les agencements de ces sons pour construire un assemblage agréable. Il semble logique de penser que tout a commencé par des expériences. Traditionnellement l'instrument expérimental pour la musique est ce que l'on nomme le monocorde, une corde tendue sur une caisse de résonance, dont on peut faire varier la longueur et la tension :

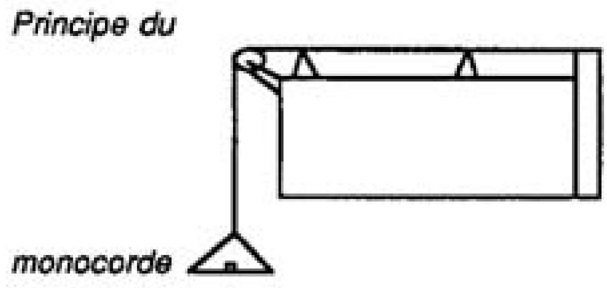


Figure 1

Dans un premier temps, on observera que si on place le chevalet au milieu de la corde, les deux parties de la corde donnent le même son, plus aigu, que celui produit par la corde entière ; si on place le chevalet au tiers à partir d'une des extrémités, la partie la plus longue donne un nouveau son (la quinte supérieure du son initial), etc.

Les pythagoriciens auraient rapidement modélisé leurs observations, c'est-à-dire mathématisé, voire axiomatisé la définition de sons qui joués ensemble résonneront agréablement. Deux sons qui pris ensemble donnent une des impressions les plus agréables sont ceux qui diffèrent d'une quinte. À partir de là, on construit la gamme pythagoricienne, basée sur le "cycle des quintes".

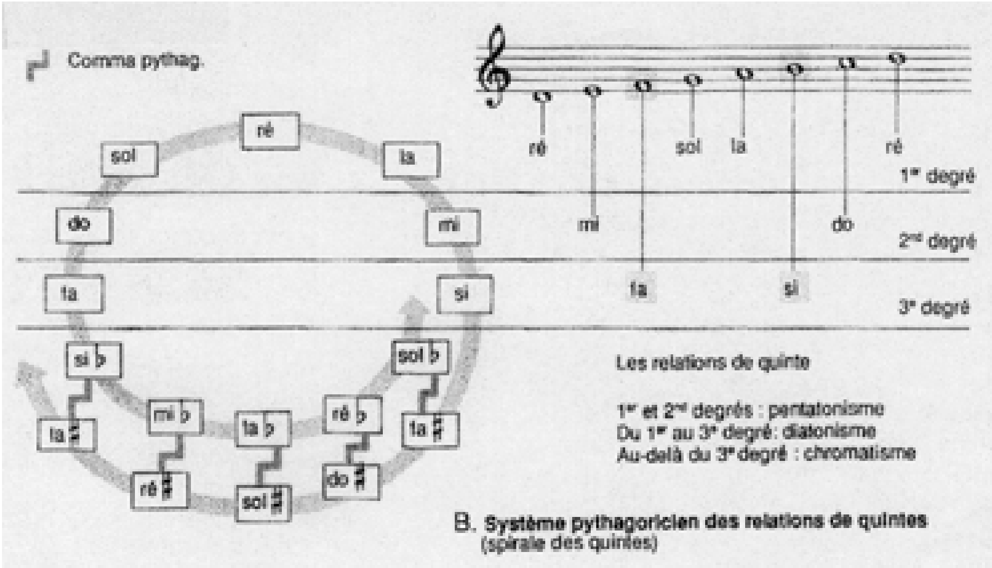

Figure 2

L'inconvénient de ce système, c'est qu'il n'est pas fermé, c'est-à-dire que l'on peut arriver à une infinité de notes, donc la transposition est impossible ; autrement dit, si vous changez de note de départ, il sera impossible de retrouver à une autre hauteur les mêmes intervalles.

La difficulté de la mise en place de gammes apparaît rapidement ; il s'agit en effet de trouver un compromis boiteux entre plusieurs exigences : une exigence de jouabilité, une exigence de justesse, une exigence de variété, donc de changement possible de tonalité.

Ce sont ces exigences plus ou moins faciles à respecter qui font une partie de l'histoire de la théorie de la musique.

Avant d'aller plus loin, examinons d'un peu plus près la gamme pythagoricienne pour comprendre le jeu des proportions. Tout repose sur cette notion.

En instituant un modèle mathématique pour la musique, les pythagoriciens ont pris en fait comme principe que deux sons sont consonants (c'est-à-dire résonnent ensemble agréablement à l'oreille) lorsqu'il y a entre eux un rapport ou un intervalle qui puisse s'énoncer simplement, qui sera donc par essence rationnel. Ce rapport sera, d'une certaine façon, celui des longueurs des cordes. Ne nous y trompons pas, le son ne dépend pas seulement de la longueur de la corde ; mais de bien d'autres éléments comme sa tension, son épaisseur, … On peut cependant imaginer un modèle où seules les longueurs interviendraient. Il n'est pas interdit de faire expérimenter nos élèves sur ce genre d'instrument ; ils prendront conscience de la difficulté de cette sorte d'étalonnage, et peut-être de la nécessité d'un modèle dont la réalité physique ne peut que s'approcher. Nous sommes déjà un peu dans la physique, mais il est difficile bien évidemment de faire autrement. Les rapports que l'on considère actuellement en musique, pour désigner les intervalles, sont des rapports de fréquences. Nous verrons pourquoi.

Ceci étant, vous pouvez lire le texte d'Euclide "La division du canon", ou le chapitre "Musique" dans l'ouvrage de Théon de Smyrne "Les mathématiques utiles pour la connaissance de Platon", et constater qu'il s'agit de pure arithmétique. Des rapports sont simples, donc indiquent des sons consonants, s'ils sont "multiples" ou "superparticuliers". Un nombre superparticulier est formé de l'unité, plus un fraction de l'unité.

Par exemple : $1+\frac{1}{2}$, ou $1+\frac{1}{5}$ etc.

Étudier la construction des gammes avec les élèves apparaîtra vite comme une façon de faire de l'arithmétique autrement.

C'est aussi étudier les logarithmes autrement.

Par exemple, l'intervalle mesuré par le rapport $\frac{3}{2}$ s'appelle une quinte.

L'octave s'exprime par le rapport $\frac{2}{1}$.

```
←--------------------octave--------------------→
|________________________|_____________|
←---------quinte-------------→←---quarte---→
```

Figure 3

Nous voudrions savoir quel est le complément à l'octave de la quinte, c'est-à-dire l'intervalle qu'il faut ajouter à une quinte pour obtenir l'octave.

Ce sera : $\frac{2}{1} \div \frac{3}{2}$ c'est-à-dire $\frac{4}{3}$, qui se nomme une quarte.

Une quarte plus une quinte donne l'octave, car le produit de leurs rapports donne 2. Nicolas Mercator (1620-1687) est un des premiers à avoir constaté que les logarithmes étaient l'instrument privilégié pour la mesure des intervalles. Il n'est pas inintéressant de donner cette autre vision des logarithmes, comme instrument de mesure des rapports.

La différence entre une quinte et une quarte est un ton : le ton correspond donc au rapport $\frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$.

Le logarithme est presque devenu partie intégrante de la musique. Par exemple, le cent est l'unité logarithmique de hauteur des sons. 1200 cents correspondent à 1 octave.

Revenons à l'établissement de la gamme, à partir par exemple du cycle pythagoricien. "Ajoutant" des quintes, on dépasse bien sûr l'octave. Or la gamme est constituée de notes qui partagent l'octave en une suite d'intervalles. Pour obtenir ces notes, l'usage est de se "ramener" à l'octave.

Une première quinte correspond au rapport $\frac{3}{2}$, par exemple l'intervalle do-sol. Lui "ajoutant" une deuxième quinte, on obtient : $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$ soit $\frac{9}{4}$, qui est supérieur à 2. Se ramener à l'octave, c'est diviser par 2 autant de fois que nécessaire pour obtenir un rapport inférieur à 2. Ici ce sera : $\frac{9}{4} \div 2$ soit $\frac{9}{8}$, qui correspond au ton. Ainsi on obtient la note ré, partant de do. Etc.

Il n'entre pas dans mon propos, comme je l'ai souligné en introduction, de rentrer dans le détail de la construction de la théorie musicale ; il s'agit juste de donner quelques pistes de travaux possibles avec nos élèves. Vous trouverez, en bibliographie, de nombreux textes sur ce sujet, abordables par eux et par quiconque n'a pas une formation musicale particulièrement poussée.

Il sera bon par exemple d'évoquer la gamme de Zarlino et d'apercevoir à quel problème musical elle voulait répondre. Bien sûr il faudra évoquer aussi le problème des gammes tempérées, excellente réponse à la demande de simplicité de transposition ou de jouabilité, au moment où des instruments comme le clavecin, sur lesquels il est difficile de faire varier la longueur de cordes par exemple, apparaissent, au détriment de la justesse des sons. Il sera nécessaire pour cela d'abandonner le dogme de la rationalité des rapports. La gamme tempérée, qui correspond par exemple aux notes du piano, s'obtient en divisant l'octave en 12 demi-tons égaux. Chacun correspond donc à un intervalle qui s'exprime par un nombre t dont la puissance douzième est 2.

$$t^{12} = 2 \text{ donc } t = \sqrt[12]{2}$$

Peut-on encore parler de sons consonants, de sons qui, joués ensemble, produisent un effet agréable à l'oreille ? La discussion dans ce cas va devenir plus physique, physiologique et artistique.

La lecture du texte d'Euler se présente alors comme un petit joyau pour aller plus avant dans ce questionnement. Nous y retrouvons le traité d'arithmétique, avec des tableaux impressionnants de diviseurs, de PGCD, de PPCM, et une reconstruction de toutes les gammes à partir de principes clairement établis, et d'autres, absolument époustouflantes, injouables à son époque sur les instruments existants. Signalons seulement que, par exemple Kirnberger, un élève de J.-S. Bach, a mis en pratique les théories d'Euler et fait construire des orgues permettant de jouer les sons de ses gammes.

Le propos d'Euler est en quelque sorte de mettre tout à plat et de reconstruire scientifiquement :

"Il résulte clairement des bons et mauvais jugements dont nous venons de parler, qu'il doit y avoir une théorie qui, se basant sur les principes les plus certains, peut expliquer pourquoi telle musique plaît ou déplaît. C'est pourquoi nous avons résolu de faire de ces principes l'objet de nos recherches, et d'établir sur eux une nouvelle théorie de la musique. Beaucoup d'autres avant nous ont entrepris ce travail, mais personne n'est allé au-delà de la doctrine des accords ; celle-ci même n'a pas été traitée de manière qu'on puisse en faire usage dans la pratique. Nous laissons à d'autres le soin de juger combien nous avons contribué à la solution d'une question que nous n'avons pas traitée dans toute son étendue ; cependant nous dirons que les préceptes qui découlent de notre théorie, s'accordent tellement bien avec la musique généralement approuvée, qu'il nous est impossible de douter de la solidité et de la vérité de nos principes. Pour obtenir cet accord nous avons rempli nous-mêmes la tâche du physicien, et nous avons poussé nos investigations sur les véritables causes de ce qui, d'après l'opinion commune, contribue à rendre la musique agréable ou désagréable. Si donc notre théorie est confirmée par l'expérience, nous croyons nous être acquitté de la tâche que nous nous sommes imposée." [10].

## III. Le point de vue de la physique

Pour construire sa théorie, Euler commence par s'intéresser à ce qu'il nomme, ainsi que nous l'avons dit plus haut, "la doctrine du son et de l'ouïe". "La première fournit la matière de la musique, et la seconde en embrasse le but et la fin qui est de charmer l'oreille. (…) La nature des sons, leur formation et leurs variétés, voilà donc ce qu'il faut que nous examinions." [10].

Nous devons reconnaître que la connaissance de l'organe de l'ouïe à l'époque d'Euler est assez restreinte et se résume plus ou moins au tympan. Mais nous nous proposons ici de considérer le point de vue de la physique et Euler, sur ce plan, avance des arguments assez performants et fera même progresser la connaissance des instruments à vent.

Pour comprendre en quoi consiste le son, il prend, de façon classique, le modèle d'une corde tendue, qui, frappée, rend un son. Le choc sur la corde lui confère un mouvement vibratoire, qui est transmis aux molécules de l'air, ces vibrations s'affaiblissant au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la source. La perception du son n'est autre que la perception des vibrations sur le tympan.

La propagation n'est pas instantanée et cette assertion donne l'occasion à notre mathématicien d'évoquer la mesure de la vitesse du son. Euler ne se contente pas d'affirmer, il justifie par des observations.

Tout son est de nature vibratoire, mais il y a des sons qui sont des "bruits" et d'autres qui sont agréables, comme la musique. Parmi ces sons agréables, il y a ceux qui sont produits par les cordes d'instruments comme les clavecins ou les violons. On peut se demander pourquoi elles produisent des sons de hauteurs différentes par exemple. Euler n'est pas le premier à essayer de donner une explication physique au phénomène. Galilée, dans la "Première journée" de son "Discours sur deux sciences nouvelles", en propose une explication. Il avance l'idée que tout réside dans la fréquence de vibrations de la corde mise en mouvement.

"Si après avoir disposé une corde sur un monocorde on la fait vibrer tout entière, puis seulement sa moitié, en plaçant un chevalet à mi-longueur, on perçoit bien l'octave, alors que si le chevalet est placé au tiers de la corde, en faisant résonner la corde entière puis les deux tiers, on obtient la quinte ; en foi de quoi ils déclarent que l'octave est dans le rapport de deux à un et la quinte dans celui de trois à deux. Cette explication, dis-je, ne me semblait pas satisfaisante pour établir sans conteste que les rapports de deux à un et de trois à deux sont bien les rapports de l'octave et de la quinte, et voici pourquoi. Il y a trois manières de rendre plus aigu le son d'une corde : la raccourcir d'abord, l'étirer ou plutôt la tendre davantage ensuite, enfin l'amincir."

Puis, plus loin :

"Elle fut le fait du hasard ; mon seul rôle fut de noter l'observation, de l'apprécier à sa valeur, puis d'y percevoir la confirmation d'importantes spéculations, encore qu'en elle-même elle fut fort banale. Je raclais en effet avec un ciseau de fer tranchant une plaque de laiton dans le but d'enlever quelques taches, lorsqu'en déplaçant avec rapidité mon ciseau j'entendis à une ou deux reprises, outre les nombreux coups donnés, un sifflement très fort et clair ; regardant la plaque, je vis alors une longue suite de minces virgules, parallèles entre elles et séparées par des intervalles rigoureusement égaux. Passant et repassant le ciseau un grand nombre de fois, je m'aperçus que des marques apparaissaient sur la plaque seulement lorsqu'un sifflement était émis, et qu'il n'y avait pas la moindre trace de ces petites virgules quand le raclage ne s'accompagnait d'aucun bruit. Je recommençais plusieurs fois le même jeu en faisant glisser mon ciseau tantôt plus vite et tantôt moins vite : le sifflement obtenu était d'un ton parfois plus aigu parfois plus grave ; j'observai aussi que les traces laissées à l'occasion d'un son plus aigu étaient plus serrées, et à l'occasion d'un son plus grave plus espacées ; d'autres fois encore, si le passage du ciseau avait été plus rapide à la fin qu'au début, on entendait le son devenir plus aigu, et l'on voyait les petites virgules devenir plus denses, mais toujours elles conservaient leur grande netteté et leur parfaite équidistance ; de plus, chaque fois qu'un sifflement se produisait, je sentais le fer trembler dans mes doigts en même temps qu'une sorte de frisson parcourait ma main. (…) Je dis que la raison première et immédiate dont dépendent les rapports des intervalles musicaux n'est ni la longueur des cordes, ni leur tension, ni leur grosseur, mais la proportion existant entre les fréquences des vibrations, et donc des ondes qui, en se propageant dans l'air, viennent frapper le tympan de l'oreille en le faisant vibrer aux mêmes intervalles de temps."

Il s'agit donc de déterminer les fréquences des vibrations. Voici la loi que nous propose Euler dans son "Tentamen". Cette loi a été indiquée par Mersenne en 1636 et presque simultanément par Galilée. Elle a été démontrée théoriquement par Taylor et publiée en 1713, dans "Methodus incrementorum".

Le nombre d'oscillations en une seconde est de : $\frac{355}{113}\sqrt{\frac{3166n}{a}}$ où n est le rapport entre la tension de la corde et son poids, a est la longueur de la corde en scrupules et 3166 la longueur de la corde, en scrupules, du pendule qui bat la seconde. $\frac{355}{113}$ est la valeur, due à Metius (1527-1607), du nombre $\pi$.

Le scrupule est le millième du pied Rhénan. Un pied Rhénan vaut environ 0,320 m.

Que d'histoire, que de recherches possibles dans une seule formule !

Nous ne nous étendrons pas plus sur le point de vue de la physique. Sachez que vous trouverez dans le texte d'Euler bien d'autres éléments, comme la théorie des nœuds, observée tant dans les cordes vibrantes que dans les colonnes d'air des instruments à vent.

L'on pourra aussi s'intéresser aux phénomènes des harmoniques, des battements, consultant à ce sujet les théories de Rameau et de Sauveur, avant de se plonger éventuellement dans les séries de Fourier. Lorsqu'une corde vibre, par exemple, elle va faire vibrer toutes les cordes qui correspondent à des multiples de sa fréquence. C'est ce que l'on nomme les harmoniques. Rameau avait découvert que l'on entendait, outre le son principal, sa douzième (une quinte plus une octave), et sa dix-septième majeure (une tierce majeure plus deux octaves). Empiétant sur le domaine de la physiologie, chacun sait que l'oreille a ses limites, et qu'elle ne peut percevoir toutes les harmoniques. Pour Euler par exemple, les limites extrêmes de perception de vibrations par seconde étaient de 30 à 7520. Ce qui représente environ 8 octaves. Actuellement, on va jusqu'à environ 20 000.

Sauveur (1753-1716), un des fondateurs de l'acoustique, ajoute aux phénomènes des harmoniques celui de battements, qui se présentent lorsqu'on entend deux sons de fréquences voisines, et qui sont très importants pour l'accordage des instruments.

Ces textes des XVIIè et XVIIIè siècles sont suffisamment lisibles et abordables pour permettre de se mettre en appétit sur ces phénomènes au demeurant complexes.

# IV. Le point de vue de la physiologie

Nous l'avons déjà évoqué à plusieurs reprises, ce qui était inévitable, puisque la musique est avant tout liée à notre perception sensitive.

C'est Helmoltz (1821-1894) qui, s'intéressant à la musique sous toutes ses formes, donnera un début d'explication sérieux à la perception des sons, musicaux en particulier, par l'oreille, dans un ouvrage de 1863, traduit en français en 1868, sous le titre : Théorie physiologique de la musique, fondée sur les sensations auditives.

Il y a en fait deux problèmes : comment percevons nous les sons, au sens physiologique du terme, et pourquoi certaine musique nous plaît plus qu'une autre, pourquoi certains sons sont agréables et d'autres non ?

Euler, ayant établi que le son se transmettait par des chocs sur le tympan, avait émis l'hypothèse que ce qui était agréable était ce qui comportait un ordre reconnaissable. Il avait alors établi une théorie sur les degrés d'agrément : deux sons sont d'autant plus consonants que les coups qu'ils portent sur le tympan (liés évidemment à leur fréquence) s'organisent suivant un ordre simple. Les fréquences doivent donc être multiples ou diviseurs. Pour visualiser cette harmonie, un peu comme Galilée, il utilise une autre expérience. Une disposition de points, agréable à la vue, peut symboliser une ordonnance de petits chocs sur le tympan, agréable à l'oreille.

Nous trouvons ainsi ce célèbre schéma :

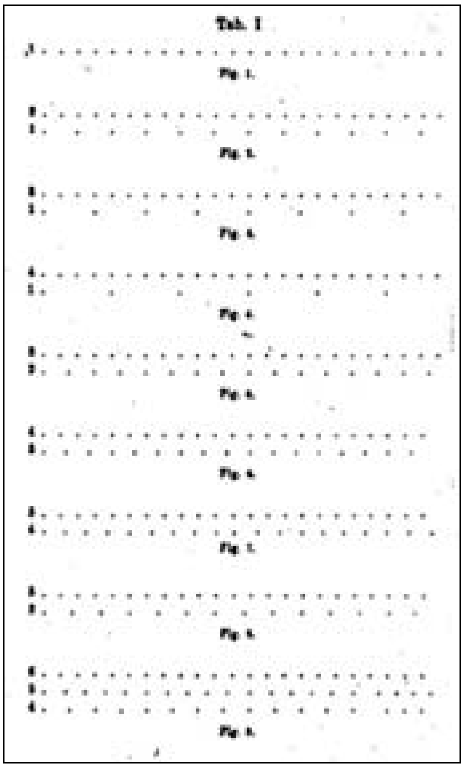

Figure 4

Les séries de points sont classées par "degré d'agrément", du plus agréable au moins agréable. Euler note au passage qu'une trop grande simplicité n'est pas forcément source de plaisir.

Ceci est à la base de toute la théorie de Euler et de sa construction des gammes. Reconstruisant tout sur ces bases, il retrouve comme signalé plus haut "la musique généralement approuvée", ce qui le mène à considérer ses hypothèses comme tout à fait valides.

Il est assez intéressant de comparer ce schéma à celui que l'on peut trouver dans un ouvrage récent [2] à propos des harmoniques de deux sons qui forment un intervalle de quinte qui est considéré comme très consonant et de deux sons qui forment un intervalle de quarte, moins consonant :

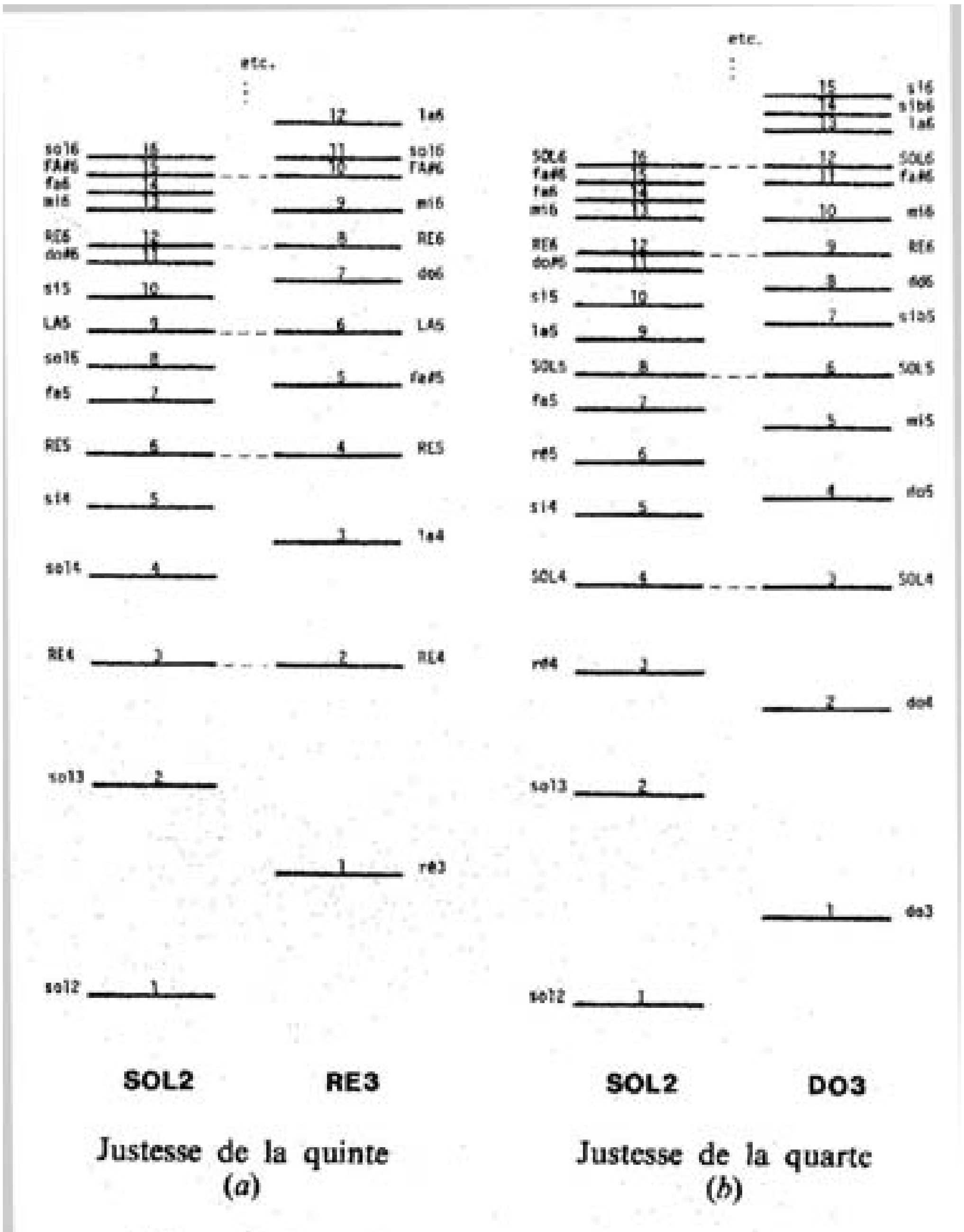


**Figure 5 : Justesse de la quinte et de la quarte.**

Figure 5

Partant du sol 2, les petits traits représentent les fréquences des harmoniques successives.

Euler signalera aussi que la "réalité physique" en quelque sorte n'est jamais en adéquation parfaite avec le modèle. En pratique, un son n'est jamais réellement pur, mais l'oreille sait rétablir le son parfait, si la différence reste dans certaines limites que l'on peut calculer.

Pour finir d'illustrer le point de vue physiologique, nous ne pouvons que recommander de s'intéresser au système auditif, qui constitue en soi un instrument de musique extrêmement perfectionné.

## V. Conclusion

Vous aurez sans doute compris que ce sujet est inépuisable et que des facettes nouvelles se présentent à chaque détour. Nous avons effleuré le problème des instruments de musique, qui sont eux-mêmes liés au développement de la théorie musicale. Un autre angle d'approche pourrait être tout ce qui est lié à l'astronomie et à la musique des sphères. Nous avons aussi évoqué dans l'atelier l'aspect contemporain de la musique, l'écriture musicale, l'évolution de la manière d'apprécier la musique, qui est en grande partie culturelle, mais peut-être pas seulement. Enfin, à l'époque de la parité, il serait peut-être judicieux d'évoquer la part des femmes dans la musique.

Nous espérons avoir montré par ailleurs qu'il n'est pas obligatoire d'être un musicologue averti pour se lancer. Le biais de l'histoire permet justement au néophyte de se former peu à peu.

Au-delà de la bibliographie que nous indiquons, vous pourrez trouver de nombreux dictionnaires ou histoires de la musique ; le sujet est à la mode et nous ne nous en plaindrons pas.

## Bibliographie

[1] ANSERMET, E. *Les fondements de la musique dans la conscience humaine et autres écrits,* collection Bouquins, éditions Laffont, 1989.
[2] ASSELIN, P. Y. *Musique et tempérament*, éditions Costallat, 1985.
[3] BELIS, A. *Aristoxène de Tarente et Aristote : le traité d'harmonique*, éditions Klincksieck, 1986.
[4] BOYÉ, A. *Sur l'Essai d'une nouvelle théorie de la musique de L. Euler,* in *Sciences et techniques en perspective*, volume 23, Université de Nantes, 1993.
[5] BOYÉ, A. *Musique et mathématiques*, in *Actes de la quatrième université d'été*, IREM de Lille, 1994.
[6] D'ALEMBERT, *Eléments de musique suivant les principes de M. Rameau*, 1762, éditions d'aujourd'hui, 1984.
[7] DESCARTES, R. *Compendium musicae*, éditions Adam et Tannery, tome X, p. 89-141. Traduction française, PUF, 1987.
[8] EUCLIDE, *La division du canon*, in *Les livres arithmétiques d'Euclide,* traduction Itard J., éditions Hermann, 1961, p. 201-205.
[9] EULER, L. *Lettres à une princesse d'Allemagne*, in *Opera physica miscellenea epistolae*, éditions A. Speiser, réédition 1960.
[10] EULER, L. *Tentamen novae theoriae musicae*, St. Petersbourg 1739, traduction française publiée par l'Association des capitaux intellectuels pour favoriser le développement des sciences physiques et des mathématiques, Bruxelles, 1839.
[11] HELMOLTZ, H. *Théorie physiologique de la musique fondée sur l'étude des sensations auditives,* traduction de Guéroult, M. G., éditions Masson, 1868.
[12] HUYGENS, C. *Le cycle harmonique*, 1691, éditions The diapason Press, Utrecht, 1986.
[13] IREM, *Kreisleriana*, cahiers du groupe mathématique et musique n°1, IREM de Basse Normandie, 1985.
[14] MERSENNE, M. *Traité de l'Harmonie universelle*, 1627
[16] MICHELS, U. *Guide illustré de la musique*, 2 volumes, éditions Fayard, 1990.
[17] PARZYSZ, B. *Musique et mathématiques*, éditions de l'APMEP, n°53; 1983.
[18] RAMEAU, J. P. *Complete theorical writings*, American Institute of musicology, 1969.
[19] THEON de SMYRNE, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, éditions Culture et civilisation, 1966.

[1] Essai d'une nouvelle théorie de la musique, écrit par Leonard Euler en 1731.