ministère éducation nationale jeunesse vie associative

éduscol

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Ressources pour le lycée général et technologique

Ressources pour la classe
de première générale

Rencontres philosophiques de Langres
Atelier 10

Mathématiques – Série S -
Pensée et calcul

janvier 2012

Éric Le Coquil, IA-IPR de l'académie de Lille,
Langres, le 24 septembre 2011

Les lignes qui suivent n'ont nullement l'ambition d'ériger un modèle, de prescrire ce qu'il faudrait faire avec une classe de première S sur le thème « pensée et calcul » : toute prescription serait contradictoire avec le projet même d'une expérimentation, a fortiori d'une expérimentation pédagogique, dans laquelle l'expérimentateur doit prendre la responsabilité de formuler ses propres objectifs, les hypothèses qu'il entend mettre à l'épreuve, et les dispositifs qui permettront de le faire, même si l'ensemble s'inscrit dans le cadrage général défini par la circulaire[1]. Il s'agit seulement de proposer, dans le temps court imparti, qui doit aussi laisser une large part à la discussion, quelques pistes très libres de réflexion à partir des éléments fournis par le programme de mathématiques de la classe de première S.

Le thème « pensée et calcul » est présenté dans l'annexe de la circulaire d'appel à projets, comme une proposition non exclusive d'autres possibilités, mais qu'il serait souhaitable d'étudier en priorité en classe de 1ère S, en relation avec la partie du programme de mathématiques intitulé « l'algorithmique ». Cette référence au programme de mathématique appelle un certain nombre de remarques et ouvre plusieurs pistes de réflexion philosophique.

L'algorithmique est une partie nouvellement introduite dans le programme en 1ère S à la rentrée 2011. Elle était antérieurement incluse dans le programme de la classe de seconde. Sa place initiale et son déplacement signalent le caractère à la fois élémentaire et transversal de l'apprentissage des pratiques et des méthodes de calcul auquel elle renvoie. C'est en vertu de ce caractère élémentaire que s'impose tout d'abord au professeur de philosophie l'exigence d'une prise en charge clarificatrice et d'une analyse de la notion elle-même, conformément à l'esprit qui est celui de l'expérimentation : « *Ces interventions auront pour objectif de préparer l'élève « à développer l'aptitude à l'analyse, le goût des notions exactes et le sens de la responsabilité intellectuelle* » et plus loin : « *Le professeur de philosophie s'attachera à analyser les notions et les problèmes permettant d'appréhender différemment et de façon complémentaire les thèmes et connaissances prévus par les programmes des différentes disciplines* ». Il est possible tout d'abord d'en faire construire la définition aux élèves à partir de l'examen de quelques opérations simples de calcul arithmétique. L'addition de deux nombres, par exemple, comporte deux entrées, une sortie, et un opérateur simple permettant, à partir de la combinaison des nombres placés en entrée, d'obtenir en sortie un autre nombre qui est leur somme selon l'opérateur simple considéré. Ainsi organisé et appliqué, le processus de l'addition a un caractère algorithmique, en ce sens qu'il constitue un processus systématique de résolution d'un problème, permettant de décrire et d'exécuter les étapes aboutissant au résultat. Une addition est l'application d'un algorithme, autrement dit d'une suite finie et non ambiguë d'instructions permettant de donner la réponse à un problème.

Il n'est pas difficile de faire remarquer que cette définition de l'algorithme a un champ d'application qui excède très largement le seul domaine des mathématiques. Ainsi, réaliser une recette de cuisine, utiliser un mode d'emploi pour faire fonctionner un lecteur DVD, indiquer son chemin à un passant égaré ou faire chercher un objet à quelqu'un par téléphone, c'est faire usage d'algorithmes, même si ceux-ci n'ont pas un caractère rigoureux et systématique suffisant – ceux d'un algorithme mathématique – pour garantir l'obtention nécessaire d'un résultat absolument fiable : les termes employés n'étant sans doute pas dépourvus d'ambiguïtés, et la suite des opérations à exécuter pour arriver au résultat n'ayant pas forcément un caractère fini ou entièrement déterminé (puisque certaines d'entre elles peuvent être laissées à l'appréciation de l'exécutant), il se peut que la tarte soit ratée, que le passant se perde à nouveau, ou que l'interlocuteur ne parvienne pas à trouver l'objet recherché. Si l'algorithmique apparaît en ce sens comme la manifestation d'une aptitude générale de l'intelligence humaine à concevoir et à suivre des méthodes de réflexion et d'action, aptitude largement partagée et sollicitée par de nombreuses circonstances de la vie courante, se pose immédiatement la question de savoir si le modèle algorithmique est généralisable ou non à toute forme d'intelligence et à toute pensée. Toute pensée est-elle, en dernière instance un calcul ? Plus précisément, la signification proprement philosophique de cette question, au-delà de toute perspective

[1] NOR : MENE1100064C circulaire n° 2011-023 du 21-2-2011 MEN - DGESCO A3-1 Bulletin officiel n°9 du 3 mars 2011.

simplement psychologique, par exemple, est de savoir si les idées, toutes les idées, sont ou non le produit de quelque chose comme un calcul.

Ce qui suscite cette interrogation, c'est la vertu qui est celle de la formalisation algorithmique du calcul, de circonscrire, dans l'opérateur qu'elle isole, tout le mystère de l'acte de jugement qui le constitue, sans pour autant percer ce mystère, qu'on peut considérer comme étant celui de ce que Kant appelle le schématisme, cet « *art caché dans les profondeurs de l'âme humaine* »[2]. C'est sur le mode d'une opération toujours définitivement cachée que semble s'effectuer l'activité de jugement et c'est en quoi le calcul, en un premier sens, est une boîte noire : nous ignorons sinon ce qui précisément, dans l'opérateur, s'opère, du moins comment il opère. Si le calcul, dans son illustration mathématique, se formalise, dans la simplicité de ses opérateurs, au plus près du mystère des opérations de l'esprit, nous place au plus près de l'œuvre secrète de l'entendement et/ou de l'imagination transcendantale, il devient tentant de le prendre comme un modèle pour l'interprétation de la pensée. Pour autant, est-il légitime de conclure ainsi du cas particulier, celui du calcul mathématique, au cas général, toute pensée, dès lors conçue comme un calcul ? De l'idée que le mystère du jugement se concentre dans le modèle du calcul à l'idée que, dès lors, toute pensée devrait se concevoir selon ce modèle, il y a en effet une inférence à laquelle on ne saurait souscrire sans devoir affronter deux difficultés.

D'une part, le schématisme, tel que Kant le thématise, n'est pas seulement impliqué dans la constitution des jugements, notamment mathématiques et entre autres de type calculatoire ; il est plus généralement impliqué dans la constitution transcendantale de toute l'expérience, en tant qu'elle est précisément déjà une expérience pensée, à défaut d'être encore connue sous la forme des sciences ; mais il devient dès lors beaucoup plus difficile de concevoir comment toute notre expérience, y compris notre perception du monde, pourrait être à la fois l'objet et le résultat d'un processus calculatoire.

D'autre part, même si l'on admettait que le schématisme transcendantal soit, au moins pour la pensée judicative ou discursive, un calcul, le schématisme épuise-t-il toute la pensée de type judicatif ou discursif ? Pour que le calcul pense intégralement, pour qu'il recouvre toute pensée possible, il faudrait qu'il ne soit pas seulement capable de procéder par schématisme déterminant, comme le fait précisément le calcul mathématique dans sa compréhension kantienne, mais il faudrait qu'il soit aussi capable de réfléchir, de schématiser sans concept, possibilité qui, au-delà de la question de l'assimilation de la pensée à un calcul, fait en soi problème, en ce qu'elle met en jeu un autre usage possible de l'imagination transcendantale, dont la réduction au modèle d'un calcul se conçoit dès lors avec plus de difficulté. A supposer même que le calcul réfléchisse, pour autant est-il légitime d'en inférer que, dès lors, toute réflexion soit réductible à un calcul ? La question se justifie d'autant que, tout d'abord, il faudrait montrer en quel sens le calcul pense, voire réfléchit : définir la pensée comme un calcul, c'est déjà supposer que le calcul pense. Mais à supposer qu'effectivement il pense ou réfléchisse, il est également difficile de dire ce qui s'y pense ou s'y réfléchit. Une procédure de calcul, en effet, a un caractère formel en vertu duquel les opérations qu'elle enchaîne n'ont pas de rapport de nature avec le problème qu'ils servent à résoudre ou les objets sur lesquels ils portent. Le calcul, par son caractère algorithmique, est un détour, il passe incontestablement par une manipulation mécanique de symboles, et c'est en quoi il est également une boîte noire un deuxième sens : nous ignorons ce qui s'y pense tout pendant qu'il s'opère, tant que le résultat n'a pas été obtenu. Et c'est précisément cette mécanique formelle qui suscite tour à tour l'intérêt et l'embarras dès qu'il s'agit se savoir si l'on peut non seulement concevoir le calcul comme une authentique pensée, mais encore toute pensée, en dernière instance, comme une forme de calcul. Intérêt, parce que l'idée éveille, dans une intention philosophique incontestablement teintée de ce qu'il faut bien appeler une forme de positivisme, l'espoir d'une rationalisation et d'une compréhension intégrale du processus de la pensée, d'une révélation de son mystère et de sa mise au jour absolue, dans la forme d'une processus intégralement extériorisable et objectivable, et, au besoin, matérialisable, qui ôterait tout mystère à l'esprit. Embarras, parce que ce qu'on a le sentiment de perdre dans une telle mécanisation de la pensée, c'est sa liberté, sa créativité, sa vie, en un mot son être propre, ce par quoi elle échappe précisément à la pure matérialité et à la mécanique pour vivre une autre vie que celle de la matière. En ce sens, la question de l'identification – ou de la réduction – ou non de la pensée au calcul, incontestablement, constitue une prise ce position métaphysiquement décisive. Toutefois, le problème, tel qu'il se trouve ainsi posé, présuppose que la pensée calculante serait nécessairement

[2] Kant, *Critique de la Raison pure*, P.U.F. Quadrige, p. 153.

peu ou prou un mécanisme, sans liberté et sans réflexion. Or, l'est-elle autant qu'il y paraît d'abord ou que ceux qui voudraient la comprendre ainsi se plaisent à le croire ?

En tout état de cause, il est incontestable que les mathématiciens calculent, et c'est pourquoi une première question sera sans doute de se demander en quel sens le calcul mathématique pense et ce qui, en lui, se pense. Il n'est pas inutile de remarquer que le programme de mathématiques de la classe de seconde, dans ces attendus, tend à porter la dimension calculatoire des mathématiques à l'universalité : il souligne que « *la démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique* » et que « *l'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques* ». C'est là déjà un double motif d'interrogation, portant à la fois sur les justifications et sur la possibilité d'une telle transversalité ou d'une telle universalité de l'approche et de la construction des méthodes algorithmiques, au vu de la diversité d'objets mathématiques à laquelle ces méthodes s'appliquent, et que le programme rappelle d'ailleurs brièvement, notamment à travers une liste d'exemples qu'il donne de différents types d'algorithmes que les élèves ont dû déjà rencontrer au cours de leur scolarité antérieure au collège : « *algorithmes opératoires, algorithme des différences, algorithme d'Euclide, algorithmes de construction en géométrie* ».

On pourrait donc se proposer comme un projet philosophique possible d'essayer de rendre compte du caractère « *naturel* » ou « *essentiel* » du calcul, sur lequel le programme de mathématiques invite à attirer l'attention des élèves, et des raisons pour lesquelles il constitue pour les mathématiques une condition de possibilité : pourquoi ne peut-il y avoir de mathématiques sans calcul ? Comment le calcul contribue-t-il à constituer les mathématiques ? En somme, en quel sens le calcul est-il constitutif de quelque chose comme la pensée mathématique ?

Calculer, étymologiquement c'est d'abord compter : le calcul suppose le dénombrement, la numération, et finalement, le nombre lui-même, qui fournissent aux mathématiques des objets et des méthodes. Or la numération et le dénombrement comptent parmi les formes par lesquelles l'esprit cesse de se perdre dans la confusion des phénomènes, dans la multiplicité des choses, mais vient en réduire et en ordonner la richesse, en repérant entre elles des identités et des différences – un arbre, un mouton, un nuage – permettant de les envisager comme des unités discrètes, qui, lorsqu'on les considère collectivement – une forêt, un troupeau, une nuée – peuvent dès lors faire l'objet d'une quantification. Si le calcul au sens de la numération rend ainsi l'esprit capable de distinguer, de comparer et d'évaluer les choses, il est indéniable, d'une part, qu'en lui quelque chose se pense, qu'il contribue à une organisation de l'expérience et à une certaine conceptualisation du réel, et d'autre part, que la découverte des nombres, qui est l'aurore des mathématiques, est par conséquent un événement de l'histoire de la pensée. Si donc le calcul mathématique suppose le nombre et les opérations de numération, et plus généralement la mesure et la quantification du monde, pensée et calcul se rejoignent incontestablement dans une certaine mise en ordre du réel et autour de cet objet de pensée et de cet instrument de mise en ordre que constitue le nombre. Toutefois, compter au sens de la numération, qui n'est calculer qu'en un sens très rudimentaire, ce n'est pas encore faire des mathématiques. La numération en effet reste engluée dans la multiplicité des phénomènes, qu'elle réduit sans pour autant la surplomber. Elle ne dit rien des propriétés des nombres et ne permet pas d'en faire grand-chose, tant qu'elle consiste simplement à juxtaposer des objets distincts, en pratique ou en imagination, à compter les nuages, ou les moutons : un mouton, deux moutons, trois moutons… au bout d'un certain temps, assez rapidement même, au mieux, l'esprit s'endort, faute justement de penser, il se disperse à nouveau dans la multiplicité devenue simplement discrète. Si la simple juxtaposition des choses elles-mêmes en vue de les compter est du reste souvent mal commode (les bergers le savent bien), leur représentation symbolique, par d'autres objets plus aisément manipulables – de petits cailloux, à proprement parler : des *calculs* – ou par des signes graphiques (des bâtons alignés), si elle a l'avantage d'être applicable à toute multiplicité (moutons, veaux, vaches, cochons, couvée), et de rendre la numération explicite en permettant de comprendre les symboles postérieurs par une composition des symboles antérieurs, ne résout pas en lui-même le problème. Il ne suffit pas de symboliser pour calculer. La *Philosophie de l'Arithmétique* de Husserl, pourrait aider à la montrer. Les objets eux-mêmes, lorsqu'ils sont en nombre important, passent rapidement les bornes de notre pouvoir de représentation numérique, tout autant que leurs substituts symboliques : que faire d'un tas de cailloux ? Procéder par décomposition en groupes ou en multiplicités partielles n'arrange rien, ceux-ci se multipliant à proportion de l'accroissement du total. Quant aux symboles, ils risquent de proliférer indéfiniment, si bien que l'imagination se trouve encore une fois débordée, au point qu'un même nombre puisse recevoir plusieurs expressions symboliques différentes : retour de la confusion[3]. Le symbolisme ne suffit pas en lui-même à constituer le calcul, s'il ne se systématise, ce qui veut dire s'il ne se construit selon un ensemble de règles opératoires qui permettent, par composition d'une gamme de symboles en nombres limités, de construire la représentation de tout nombre possible. Mais dès lors un saut qualitatif s'opère : « *la systématique des nombres acquise* », écrit Husserl dans la *Philosophie de l'Arithmétique*, « *(en particulier notre système décadique usuel) est bien moins une méthode pour attribuer aux concepts donnés des signes que pour construire de nouveaux concepts et pour les désigner en même temps qu'ils sont ainsi construit*s ». Le procédé n'est plus seulement de construction des symboles, il devient celui de la construction des nombres eux-mêmes que ces symboles désignent[4], parce qu'il permet de les construire les uns à partir des autres, et de rendre par là même exprimable non seulement leurs propriétés (pair, impair, premier, etc.), mais également celles des opérations par lesquelles ils sont produits (addition, multiplication, etc.) et qui sont autant de règles constitutives du système auquel ils appartiennent : commutativité, associativité, distributivité, etc. Nous avons dès lors affaire à un système des nombres et des opérations sur les nombres : l'arithmétique. Et ce système rend possible des calculs qui ne sont plus seulement des énumérations mais qui ont des jugements sur les nombres, des jugements arithmétiques (5 + 7 = 12) et des jugements fondés sur l'application de règles systématiques, autrement dit des jugements nécessaires et fondés en raison : et nous sommes passés de la question empirique de l'origine des nombres (d'où les nombres viennent-ils ?) à la question de leur fondement théorique. Il n'y a évidemment là qu'un premier pas vers la notion de système formel les problèmes logiques et épistémologiques qu'il soulève (complétude, décidabilité) : d'autres pourront être ultérieurement franchis, dans la continuité de cette réflexion ou par d'autres voies. Il n'est peut-être pas utile ni souhaitable d'en venir immédiatement ou en tout cas trop rapidement au problème difficile du statut ontologique des nombres (sont-ils choses en soi ou constructions de l'esprit ?), qu'on pourra garder pour la bonne bouche.

Pourquoi ne peut-il y avoir de mathématiques sans calcul ? Réponse : parce que le calcul – et c'est en quoi il pense – est ce qui permet la formation de jugements mathématiques dont il est la forme élémentaire : il dit quelque chose des nombres et de leurs propriétés, il dit quelque chose de quelque chose (« ti kata tinos », comme dit l'autre), la question restant ouverte de savoir si les nombres disent quelque chose de la réalité, ce qui veut dire ce que le calcul en pense. Mais il n'en reste pas moins que c'est parce qu'il pense au sens où il juge que le calcul est constitutif des mathématiques comme science, parce que tout jugement mathématique n'est rendu possible que dans le cadre d'un système formel, dont l'arithmétique est un premier exemple. (Je laisse de côté volontairement, faute de temps, la question des rapports du calcul avec la géométrie, qu'il faudrait pouvoir également aborder, pour traiter de façon satisfaisante la question de l'universalité du calcul en mathématiques). Et c'est même là penser en un sens qui est tout sauf banal mais au contraire éminent : le nombre a dû être inventé et il a fallu apprendre à s'en servir ; le nombre, comme le calcul, historiquement, furent d'abord non pas les objets, les outils ou les formes d'une pratique scientifique des mathématiques, mais les instruments techniques de pratiques concrètes, de comptabilité agraire (Babylone Egypte), par exemple, qui ne faisaient pas immédiatement théorie constituée, ou le firent en tout cas plus tardivement que d'autres parties des mathématiques comme la géométrie. Il y a une origine non mathématique des mathématiques, comme il y a, explique Nietzsche au paragraphe 110 du *Gai Savoir*, « *L'origine de la logique* », une origine illogique de la logique. Et il faut donc s'attendre à découvrir une origine incalculable du calcul. De ce point de vue, rapprocher la pensée et le calcul ce n'est pas énoncer une évidence. Le calcul mathématique n'est pas un modèle immédiatement évident ou naturel pour caractériser l'activité de la pensée dans son ensemble, en ce qu'il est le résultat du développement de techniques complexes, au fil d'une histoire qui est tout aussi bien celle des sciences que celle des techniques et des civilisations. Bref, le développement de techniques de calcul, même de celles qui relèvent de l'arithmétique considérée comme la plus élémentaire, figure au nombre des activités les plus élaborées de l'esprit, et constitue une construction éminemment sophistiquée et artificielle, un prodige de la créativité de l'esprit humain et de l'histoire des cultures. Un fait le montre : tandis que la question de savoir si l'on apprend ou non à penser est sujette à discussion, en revanche, la réponse à la question de savoir si l'on apprend ou non à calculer est univoquement et incontestablement positive, le calcul mathématique, même sous ses formes techniques les plus élémentaires, nécessite incontestablement un apprentissage. Et ce n'est que sous condition de cet apprentissage, qui sollicite les efforts de la mémoire, l'agilité du raisonnement, et exerce le jugement, que le calcul mathématique peut finalement devenir le calcul mental qu'il n'est pas tout d'abord : la mentalisation du calcul, en son

[3] D. Parrochia, *Qu'est-ce penser/calculer ?* Pré-texte, Vrin, 1992, pp. 12 à 14.

[4] Husserl, *Philosophie de l'Arithmétique*, Epiméthée, P.U.F., 1972, p. 288.

sens mathématique en tout cas, est ainsi un point d'aboutissement et non un point de départ. La facilité et la spontanéité avec laquelle certains finissent par l'effectuer ne doit pas faire illusion : elles sont le résultat d'un entraînement, d'une longue habitude et nullement d'une nature.

C'est la constitution des nombres en système arithmétique qui permet le calcul au sens algorithmique et c'est l'apprentissage de son usage systématique qui permet de produire des jugements mathématiques, en l'occurrence des jugements arithmétiques. Mais, penser, d'une part, est-ce seulement juger, et le jugement, d'autre part, épuise-t-il la pensée ? Si le calcul est un jugement, tout jugement est-il un calcul ? Les machines à calculer, en lesquelles le calcul s'externalise, s'automatise et se mécanise, mécanisent-elles le jugement ?

Il y a là une première ligne philosophique, qui ouvre sur le problème du jugement, qu'il faudrait poser et examiner précisément : on pourra le garder, en tant que tel, pour le cours de terminale. Ou bien l'aborder selon un autre angle. Je m'arrête là. Revenons au programme de mathématiques.

Le caractère transversal de l'algorithmique affirmé par le programme de mathématiques de 1ère S explique que la partie qui lui est consacrée ne prescrive aucun contenu particulier de connaissances mathématiques. La prescription est seulement celle de la pratique d'une « *formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel* ». Cela signifie que toutes les autres parties du programme de mathématiques de 1ère S peuvent et doivent fournir le matériau de la pratique algorithmique, selon des choix et une organisation qui sont laissés à la liberté pédagogique du professeur de mathématiques, y compris d'ailleurs le choix des langages et des logiciels utilisés, qui « *n'est pas imposé* », et d'une façon qui n'est pas exclusive d'autres approches. Le programme précise en effet que : « *les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante* ». On voit donc ici que l'introduction d'une approche philosophique des problèmes scientifiques posés par le calcul n'a absolument rien d'artificiel d'un point de vue pédagogique, puisqu'elle est explicitement appelée par le programme de mathématiques, au sein duquel la dimension interdisciplinaire des questions à aborder est résolument inscrite, et constitue en ce sens le moyen de réaliser un part des objectifs d'apprentissages prescrits. Du reste la référence à « *la vie courante* » ouvre également à une réflexion sur l'articulation du calcul mathématique à la pensée de sens commun et à la distance qui l'en sépare, à partir de laquelle se pose la question de la fonction des formalismes, de leur puissance euristique et de ses limites.

La section « algorithmique » du programme de mathématiques de 1ère S subordonne ces différents éléments à deux objectifs d'apprentissage :

1. « *Familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d'une valeur et mise en forme d'un calcul* ». Les élèves doivent être familiarisés avec des pratiques de formalisation mathématiques et leurs principes sur lesquels il est possible de les faire s'interroger, le cas échéant par comparaison avec d'autres pratiques de formalisation, par exemple celles de la logique des propositions, dont on pourrait envisager de leur enseigner quelques aspects élémentaires : étude de quelques connecteurs, tables de vérité, notions élémentaires de calcul et d'évaluation des EBF. L'introduction de quelques notions de logique formelle, comme point de comparaison avec les formalismes mathématiques se justifie d'autant plus que les programmes de mathématiques comportent dès la classe de 2de une rubrique intitulée « *Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)* », rubrique également présente dans le programme de 1ère S et « *consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique* », qui distingue expressément les deux types de notation, mathématique et logique : « ***Notations mathématiques :*** *Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant (…) ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.* ***Pour ce qui concerne le raisonnement logique*** **»**, les élèves doivent être « *entraînés :*

- *à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ; » : on retrouve la question de la fonction du formalisme par rapport à la pensée de sens commun*
- *à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel » dont les symboles cependant ne sont pas exigibles) « et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;*

- *à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;*
- *à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;*
- *à formuler la négation d'une proposition ;*
- *à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;*
- *à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.*

Beau programme de logique en vérité, qu'il serait cependant sans doute déraisonnable de vouloir prendre en charge comme tel, dans une classe de première et *a fortiori* de seconde. Il est du reste expressément précisé dans les attendus du programme, d'une part, selon le même principe pédagogique qui régit la rubrique « l'algorithmique », que l'apprentissage de ces compétences et de ces outils élémentaires de logique que la pratique des mathématiques suppose « *ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répart[i]sur toute l'année scolaire* », ce qui signifie que, de la même façon, l'apprentissage des notations, des formalismes et des méthodes de raisonnement ne constitue pas un matériau en soi, mais doit s'effectuer sur le matériau des autres rubriques du programme ; d'autre part, que ces compétences et ces outils doivent être exercés « *sur des exemples* » : cette seconde recommandation exprime une exigence de circonscription disciplinaire rigoureuse, qui empêche que le cours abandonne les mathématiques au profit de la logique formelle, mais qui ouvre du même coup une piste de réflexion possible sur la différence des deux sciences et sur l'articulation de l'une à l'autre, sur la question de savoir dans quelles limites l'une est capable de fournir à l'autre le fondement de ses objets, de ses méthodes, de sa scientificité. Il n'est donc pas inenvisageable que le professeur de philosophie esquisse pour son compte et de façon simplifiée une analyse théorique élémentaire de ces outils logiques, qui aurait le double avantage, d'une part, en montrant l'impossibilité de télescoper brutalement et sans précautions les formalismes des deux disciplines, de commencer à dessiner les contours de la notion de système formel, d'autre part, de commencer à soulever le problème de la possibilité et des limites d'une fondation logique des mathématiques. Je n'entre pas dans le détail faute de temps : vous connaissez.

2. Le deuxième objectif prescrit est de « donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle ». Cet objectif ouvre à une réflexion sur le sens de la rigueur de la pensée et du jugement en mathématiques, sur la question de savoir si le calcul suffit à lui seul à la constituer, et si elle lui est irréductible, sur les principes de jugement qui au-delà de la seule forme du calcul, permettraient de la fonder.

On pourrait faire observer d'abord que la question de la rigueur déborde largement le domaine des mathématiques, dont elle n'est nullement l'apanage exclusif, à partir de l'exemple du raisonnement judiciaire, où la rigueur ne se réduit jamais en la simple application d'une règle, mais consiste à déterminer quelle règle s'applique et comment elle s'applique compte tenu de la particularité de chaque cas[5] (en mémoire par exemple de l'analyse aristotélicienne de l'équité, au livre V de l'*Ethique à Nicomaque*). La règle laisse donc toujours place au jugement. En va-t-il de même en mathématiques, pour la règle de calcul, ou bien le calcul mathématique induit-il un usage forcément mécanique de ses règles ? Pour commencer, on pourrait partir tout d'abord, pour explorer ce problème, d'une réflexion sur l'exactitude comme critère de la rigueur. On montrerait alors, au moyen de quelques exercices appropriés, que l'approximation, en mathématiques, n'est pas le contraire de l'exactitude, qu'elle ne la contredit pas et ne constitue pas une entorse ou une faute du point de vue de la rigueur, mais que le calcul par approximations, utilisé avec méthode, peut au contraire, sous certaines conditions, constituer une procédure rigoureuse, autrement dit, que, même en mathématiques, on peut toujours faire autrement, juger autrement, penser autrement. On pourra ensuite fonder cette idée sur une analyse philosophique plus globale du jugement. Le jugement, écrit Kant dans la *Critique de la Raison pure*, est « *le pouvoir de décider si une chose est ou n'est pas soumise à une règle donnée* ». L'application des règles, y compris celle des règles de calcul, se trouve donc tributaire d'une activité décisive ou décisoire, l'activité de jugement, qui est sa condition de possibilité : la règle de calcul, comme toutes les règles de l'entendement, n'est pas à elle-même sa propre règle, au sens où elle contiendrait en elle-même la règle de sa propre application, sans quoi elle ne serait plus une règle mais, précisément, un principe, et ne relèverait plus de l'entendement

[5] Jean-Pierre Cléro, *Les Raisons de la Fiction, Les Philosophies et les Mathématiques,* Armand Colin, 2004, pp. 358 à 363.

mais de la raison pure, parce qu'elle serait capable de prévoir, de prédéterminer à l'avance absolument tous les cas possibles de son application. Le jugement par lequel se décide l'application de la règle de calcul n'est pas lui-même et ne peut pas être l'application d'une règle. Le jugement mathématique à l'œuvre dans le calcul ne peut donc, à proprement parler, s'apprendre, mais peut seulement s'exercer, tout comme la philosophie qui, procédant toujours elle-même d'un jugement, excède toujours la simple application de règles, avec cette différence qu'est possible en mathématiques un jugement par construction de concepts que la philosophie n'est pas en mesure de produire, pour des raisons qu'il serait évidemment utile d'expliquer ici : je passe, faute de temps. Bref, le jugement calculatoire en mathématiques s'exerce, au double sens où il n'existe que s'il est exercé à force d'exercices, comme une faculté de discernement. Le paradoxe est donc qu'on ne peut produire et appliquer correctement des règles, même des règles de calcul, que si l'on est libre à leur égard. Le jugement contribue sans cesse à la production, à la justification et à l'application des règles. Calculer, et bien calculer en mathématiques, c'est toujours d'abord choisir la règle de calcul qui convient, la règle pertinente, parmi tant d'autres règles, de formules et d'algorithmes possibles, et la faute de calcul procède toujours d'un manque de discernement dans ce choix : en ce sens elle est bien une faute, et non simplement une erreur dans la mise en œuvre de la règle, même si c'est le résultat auquel elle conduit. La rigueur est l'interrogation et la mise en œuvre critique de cette liberté du jugement, tout déterminant qu'il soit en mathématiques, et les mathématiques, même dans le calcul, pensent en ce qu'elles ne peuvent vraiment se pratiquer et s'enseigner que comme une forme de l'esprit critique. Le calcul ne pense que s'il est un scrupule. Alors il est véritablement rigoureux. Mais la rigueur n'est que si elle décide et se décide : origine incalculable du calcul. Forme d'inquiétude aussi. Il faudrait développer. Et c'est pourquoi les machines à calcul, de la pascaline à l'ordinateur, en réalité ne calculent rien : elles ne jugent pas, elles computent, ce qui veut dire qu'elles combinent des données selon des règles dont elles ne décident pas, mais dont les différents choix possibles ont été décidés à l'avance et fixés à leur tour comme une règle ou comme le résultat d'une combinaison possible de règles, si grandes soit le nombre des possibles, dont le jeu, même celui de la création de nouvelles règles, obéit toujours à une règle prédéterminée. Car tout est joué d'avance : au jeu des combinaisons, l'ordinateur aura toujours le dessus : sa puissance mécanique l'emporte ; au jeu de la décision, rien n'est moins certain, car la computation est contrainte : de fait, la manifestation première de votre GPS ou de votre micro-ordinateur est de faire obstacle à vos décisions, ce qui ne signifie pas qu'ils tentent alors de décider à votre place. Le GPS compute la route, vous la calculez au sens où vous la décidez, où vous en jugez : vous pouvez toujours l'éteindre. Le calcul est un acte libre du jugement, sauf à penser qu'entre la computation d'une combinaison parmi un nombre possible tendant vers l'infini et une décision, il y ait une simple différence de degré et non une différence de nature. C'est là l'enjeu, un enjeu métaphysique, comme le sont par conséquent les thèses qui prétendent ramener toute pensée à un simple calcul au sens de la computation, qui procèdent elles-mêmes, en réalité, d'une décision métaphysique.

Quelques exemples d'exercices proposés par le professeur de mathématiques, à partir desquels une réflexion philosophique peut être développée.

1. Les fonctions logistiques.

1. Le modèle de Verhulst.

Comment la population d'un groupe donné évolue-t-elle relativement à la donnée d'un effectif idéal (« I ») ? l'hypothèse de Verhulst est que la population tend à se rapprocher de I :

Soit P la population d'effectif initial P_0 et d'effectif idéal I dans un environnement donné.
L'effectif devient P_1 à l'année 1 ;
L'effectif devient P_2 à l'année 2 ;
L'effectif devient P_n à l'année n ;

L'hypothèse de Verhulst est que :

$\frac{P_{n+1}-P_n}{P_n}$ est proportionnel à $I-P_n$

il existe donc $k\in\mathbb{R}$ tel que, quel que soit n,

$$\frac{P_{n+1}-P_n}{P_n}=k(I-P_n)$$

d'où : $P_{n+1}=P_n+kP_n(I-P_n)$

Questions : que se passe-t-il pour P_{n+1} quand : a) $P_n=I$; b) $P_n<I$; c) $P_n>I$?
si pour un n donné, $P_n=I$, alors P_{n+1} sera égal à I toutes les années suivantes ;
si pour un n donné, $P_n<I$, alors $P_{n+1}\geq P_n$
si pour un n donné, $P_n>I$, alors $P_{n+1}\leq P_n$
conclusion : dans tous les cas, P_n va se rapprocher de l'environnement idéal I.

2. La suite logistique.

Soit une suite (u_n) telle que : $u_n=\frac{P_n}{I}$,

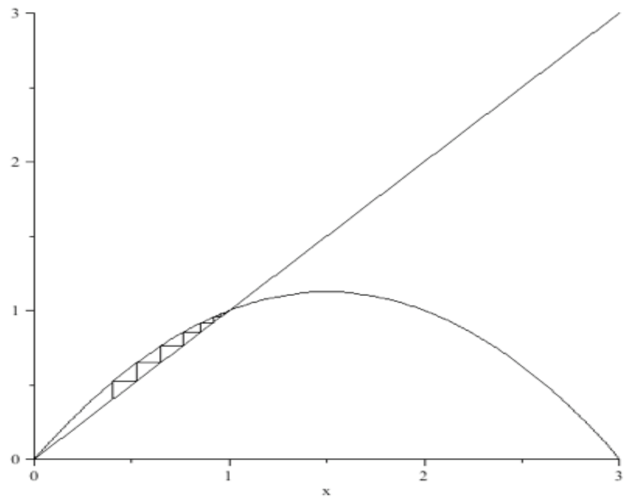
alors $\frac{P_{n+1}}{I}=\frac{P_n}{I}+kI\frac{P_n}{I}(1-\frac{P_n}{I})$

c'est-à-dire : $u_{n+1}=u_n+kI\,u_n(1-u_n)$

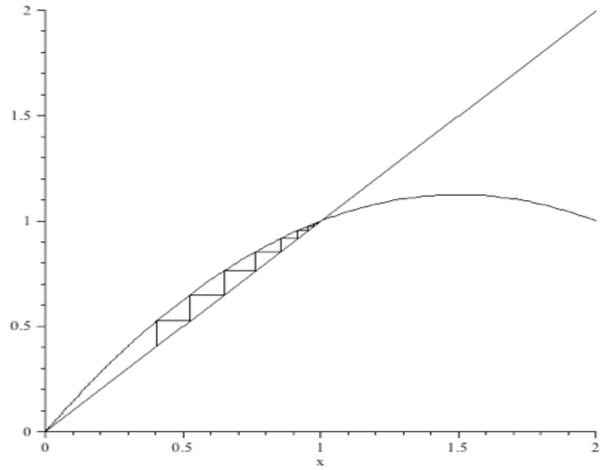
si on prend I=1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$f:x\to f(x)=x+kx(1-x)$

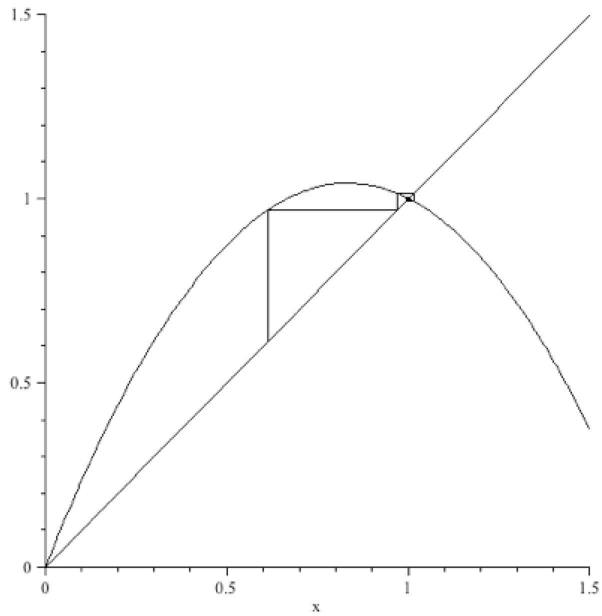
Questions : a) tracé de f sur la calculatrice ; b) établir le tableau de variation.
F est une parabole.
c) *construction de f après avoir choisi u_0 et k, et construction de la ligne polygonale pour établir la suite u_n*
valeurs de k : 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3. Quelles sont les valeurs de u_0 ?



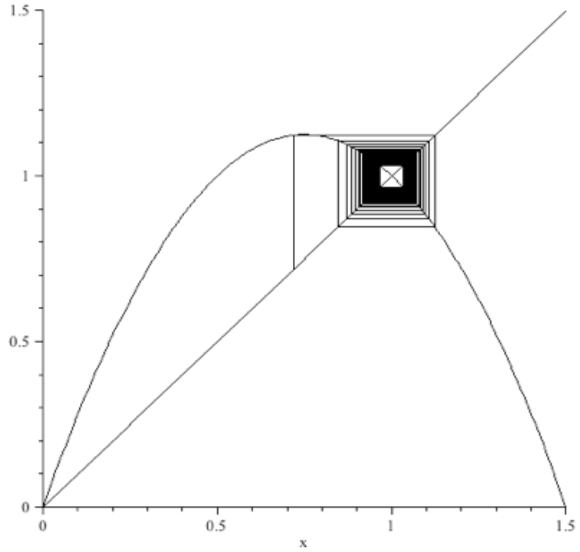
Lorsque k=0,5, la sensibilité est faible et on a une convergence vers I :



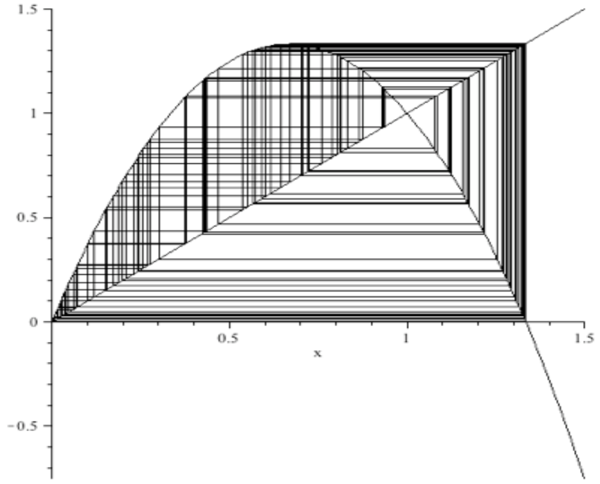
Lorsque k= 1,5 : on observe alors un enroulement en dessous et au dessus de l'idéal.



Lorsque k= 2, les populations fonctionnent par cycles :



Lorsque k= 3, on est dans une situation de chaos.



2. La théorie des jeux et le dilemme du prisonnier.

a) Quelle est la meilleure façon de partager un gâteau entre deux enfants ?

b) Comment jouer parfaitement au morpion ?

c) Le cas des jeux à somme non-nulle : le dilemme du prisonnier :

La forme habituelle de ce dilemme est celle de deux prisonniers (complices d'un délit) retenus dans des cellules séparées et qui ne peuvent communiquer.

- si un des deux prisonniers dénonce l'autre, il est remis en liberté alors que le second obtient la peine maximale (10 ans) ;
- si les deux se dénoncent entre eux, ils seront condamnés à une peine plus légère (5 ans) ;
- si les deux refusent de dénoncer, la peine sera minimale (6 mois), faute d'éléments au dossier.

Chacun des prisonniers réfléchit de son côté en considérant les deux cas possibles de réaction de son complice.

- « Dans le cas où il me dénoncerait :
  - Si je me tais, je ferai 10 ans de prison ;
  - Mais si je le dénonce, je ne ferai que 5 ans. »
- « Dans le cas où il ne me dénoncerait pas :
  - Si je me tais, je ferai 6 mois de prison ;
  - Mais si je le dénonce, je serai libre. »
- « Quel que soit son choix, j'ai donc intérêt à le dénoncer. »

Bibliographie :

BENMAKHLOUF A., *Gottlob Frege Logicien Philosophe*, Philosophies, P.U.F., 1997.

BENMAKHLOUF A., *Vocabulaire de Frege*, Ellipse, 2001.

BLANCHÉ R., DUBUCS J., *La Logique et son Histoire*, Armand Colin, 1996.

BLANCHÉ R., *L'Axiomatique,* Sup Initiation philosophique, P.U.F., 1967.

BLANCHÉ R., *Introduction à la Logique contemporaine*, Armand Colin, 1968.

BOOLE G., *The Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge University Press, 2009.

BOOLE G., *Les Lois de la Pensée*, Mathésis, Vrin, 1992.

CLÉRO J.-P., *Les Raisons de la Fiction, Les Philosophes et le Mathématiques*, Armand Colin, 2004.

COURTEBRAS B., *Mathématiser le Hasard, Une Histoire du Calcul des Probabilités*, Vuibert.

COUTURAT L., *La Logique de Leibniz*, OLMS, 1985.

DAHAN-DALMÉNICO A., PEIFFER J., *Une Histoire des Mathématiques, Routes et Dédales*, Points Sciences, Editions du Seuil, 1986.

DESCARTES R., *Règles pour la Direction de l'Esprit,* traduction et notes par J. Brunschwig, in Œuvres philosophiques, tome I, édition Classiques Garnier, p. 67.

DESCARTES R., *Lettre à Mersenne du 20 novembre 1629,* in Œuvres philosophiques, tome I, édition Classiques Garnier, p. 227 à 232.

FREGE G., *Écrits logiques et philosophiques*, traduction de Claude Imbert, Le Seuil, 1971, réédition *Points.*

FREGE G., *Les Fondements de l'Arithmétique*, traduction de Claude Imbert, Le Seuil, 1969, réédition *Points.*

HEGEL G.W.F., *Science de la logique* (1812), I, 1, Section II (Quantité), Remarque 2, Aubier-Montaigne, 1972, pp. 198 à 201.

HEIDEGGER M., *Questions III*, *Sérénité*, Classiques de la Philosophie, Gallimard, 1966, p. 161 et sq.

HEIDEGGER M. , *Qu'appelle-t-on penser ?* , Quadrige, P.U.F., 1959 ; particulièrement pp. 240 et sq.

HOBBES TH., *Léviathan*, Chapitres III et V

HUME, *Traité de la Nature humaine*, Tome I, 3ème partie, Aubier-Montaigne,

HUSSERL, *Philosophie de l'Arithmétique*, Epiméthée, P.U.F., 1972.

KANT E., *Critique de la Raison pure*, traduction Trémesaygue-Pacaud, 6ème édition, Quadrige, P.U.F., 1968.

KANT E., *Prolégomènes à toute Métaphysique future qui pourra se présenter comme Science*, Vrin, 1997, § 2.

KNECHT H. H., *La Logique chez Leibniz, Essais sur le rationalisme baroque*, Dialectica, L'Âge d'Homme, 1981.

KLEENE S.C., *Logique mathématique*, Armand Colin, 1971.

LABARRIÈRE J.-L., *L'intelligence*, in Kambouchner D. (éd.), *Notions de Philosophie*, tome I, Folio Essais, Gallimard, 1995, pp. 423 à 487 ; sp. pp. 470 à 485.

LEIBNIZ G. W., *Mémoires à l'Académie des Sciences de Paris* (1703).

LEIBNIZ G. W., *Nouveaux Essais sur l'Entendement humain*, traduction J. Brunschwig, Garnier Flammarion, 1966 ; Livre IV, chapitre VII, pp. 358 à 377.

LEIBNIZ G. W., *Lettre à Clarke*, 1715, in ROBINET, A., *Correspondance Leibniz-Clarke*, P.U.F., 1957.

PARROCHIA D., *Qu'est-ce que penser/calculer ?*, Pré-texte, Vrin, 1992.

POUNDSTONE W., *Le Dilemme du Prisonnier - Von Neumann, la Théorie des Jeux et la Bomre*, Cassini, 2003.

PUTNAM H., *Représentation et réalité*, traduction de Claudine Tiercelin, Gallimard, NRF-Essais, 1990.

SEARLE J., *La Redécouverte de l'esprit*, traduction de Claudine Tiercelin, Gallimard, NRF-Essais, 1995.

SINÈGRE L., *Histoire du calcul de la géométrie à l'algèbre*, Vuibert 2009.

VERNANT D., *Introduction à la Logique standard*, Champs Université, Flammarion, 2001.

VON NEUMANN J., MORGENSTERN O., *Théorie des Jeux et Comportements économiques*, Université des Sciences sociales de Toulouse, 1977.

WARUSFEL A., *Les Nombres et leurs Mystères*, Points Sciences, Editions du Seuil, 1980.