

Projet de programme de la classe terminale de la voie générale

Mathématiques

série économique et sociale (ES) –
enseignement spécifique et de spécialité
série littéraire (L) – enseignement de
spécialité

L'organisation de la consultation des enseignants est confiée aux recteurs,
entre le lundi 7 mars et le vendredi 22 avril 2011.

Parallèlement au dispositif mis en place dans les académies par les IA-IPR, les
contributions peuvent être envoyées depuis eduscol.education.fr/consultation

8 mars 2011

Mathématiques

Classe terminale de la série économique et sociale – enseignement spécifique

Classe terminale de la série littéraire – enseignement de spécialité

L'enseignement des mathématiques au collège et au lycée a pour but de donner à chaque élève la culture mathématique indispensable pour sa vie de citoyen et les bases nécessaires à son projet de poursuite d'études.

Le cycle terminal des séries ES et L permet l'acquisition d'un bagage mathématique qui favorise une adaptation aux différents cursus accessibles aux élèves, en développant leur sens critique vis-à-vis des informations chiffrées et, plus largement, en les formant à la pratique d'une démarche scientifique.

L'apprentissage des mathématiques cultive des compétences qui facilitent une formation tout au long de la vie et aident à mieux appréhender une société en évolution. Au-delà du cadre scolaire, il s'inscrit dans une perspective de formation de l'individu.

Objectif général

Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :

- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

Raisonnement et langage mathématiques

Comme en classe de seconde, les capacités d'argumentation et de logique font partie intégrante des exigences du cycle terminal.

Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne font pas l'objet de cours spécifiques mais prennent naturellement leur place dans tous les champs du programme.

De même, le vocabulaire et les notations mathématiques ne sont pas fixés d'emblée, mais sont introduits au cours du traitement d'une question en fonction de leur utilité.

Il convient de prévoir des temps de synthèse, l'objectif étant d'atteindre une bonne maîtrise en fin de cycle terminal.

Utilisation d'outils logiciels

L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation.

En particulier, lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel limite le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements.

L'utilisation de ces outils intervient selon trois modalités :

- par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective ;
- par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors de la classe.

Diversité de l'activité de l'élève

Les activités proposées en classe et hors du temps scolaire prennent appui sur la résolution de problèmes essentiellement en lien avec d'autres disciplines. Elles enrichissent la culture scientifique dans différents domaines : historique, économique, artistique, etc. De nature diverse, elles doivent entraîner les élèves à :

- chercher, expérimenter, modéliser, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- choisir et appliquer des techniques de calcul ;
- mettre en œuvre des algorithmes ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit.

Des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques s'insèrent naturellement dans la mise en œuvre du programme. Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts.

Fréquents, de longueur raisonnable et de nature variée, les travaux hors du temps scolaire contribuent à la formation des élèves et sont essentiels à leur progression. Ils sont conçus de façon à prendre en compte la diversité et l'hétérogénéité de leurs aptitudes.

Les modes d'évaluation prennent également des formes variées, en phase avec les objectifs poursuivis. En particulier, l'aptitude à mobiliser l'outil informatique dans le cadre de la résolution de problèmes est à évaluer.

Organisation du programme

Le programme fixe les objectifs à atteindre en termes de capacités. Il est conçu pour favoriser une acquisition progressive des notions et leur pérennisation. Son plan n'indique pas la progression à suivre.

Les capacités attendues dans le domaine de l'algorithmique d'une part et du raisonnement d'autre part sont rappelées en fin de programme. Elles doivent être exercées à l'intérieur de chaque champ du programme. Les exigences doivent être modestes et conformes à l'esprit des filières concernées.

Les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole \diamond .

1. Analyse

Un des objectifs de ce programme, comme en classe de première, est de doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets.

On poursuit l'étude des suites géométriques pour lesquelles on aborde la notion de limite, ce qui peut conduire à différents types de questionnement, notamment philosophique ou économique.

On consolide l'ensemble des fonctions mobilisables, enrichi des fonctions exponentielles et de la fonction logarithme népérien. Les fonctions exponentielles sont l'occasion d'évoquer le passage d'une situation discrète à une situation continue.

La notion de convexité est introduite et étudiée essentiellement dans un cadre graphique. Elle est largement utilisée en économie, en particulier pour des problèmes de coût ou de rendement croissant et décroissant.

Enfin, s'ajoute le nouveau concept d'intégration qui, bien que modestement abordé et développé, demeure un concept fondamental de l'analyse.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p>Suites</p> <p>Suites géométriques.</p> <p>Limite de la suite (q^n), q étant un nombre réel strictement positif.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Reconnaître et exploiter une suite géométrique dans une situation donnée. • Connaître la formule donnant $1 + q + \dots + q^n$ avec $q \neq 1$. • Déterminer la limite d'une suite géométrique de raison strictement positive. <p>◇ Étant donné une suite (q^n) avec $0 < q < 1$, mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel q^n est inférieur à un réel a positif donné.</p>	<p>Le tableur, les logiciels de géométrie dynamique et de calcul sont des outils adaptés à l'étude des suites, en particulier pour une approche expérimentale de la notion de limite.</p> <p>On détermine, sans soulever de difficulté, la limite de la somme $1 + q + \dots + q^n$ quand $0 < q < 1$.</p> <p>Le comportement lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme des n premiers termes de certaines suites géométriques fournit un exemple de suite croissante n'ayant pas pour limite $+\infty$.</p> <p>On évoque les aspects historiques et philosophiques de cette question en présentant quelques paradoxes classiques.</p>
<p>Suites arithmético-géométriques.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Traduire une situation donnée à l'aide d'une suite arithmético-géométrique. 	<p>Toute indication doit être donnée dans l'étude des suites arithmético-géométriques.</p>

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p>Notion de continuité sur un intervalle</p>		<p>On se limite à une approche intuitive et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle.</p>
<p>Fonctions exponentielles</p> <p>Fonction $x \mapsto q^x$ avec $q > 0$.</p> <p>Relation fonctionnelle.</p> <p>Fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.</p> <p>Dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Exploiter le tableau de variation pour déterminer : <ul style="list-style-type: none"> - le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$; - le signe d'une fonction. • Connaître l'allure de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto q^x$ selon les valeurs de q. • Connaître la dérivée, les variations et la représentation graphique de la fonction exponentielle. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Calculer la dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$. 	<p>La propriété des valeurs intermédiaires est présentée graphiquement ; on convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.</p> <p>Ces fonctions sont présentées comme le prolongement continu des suites géométriques. On admet que ces fonctions sont dérivables sur \mathbf{R} et transforment les sommes en produits.</p> <p>On fait observer à l'aide d'un logiciel qu'entre toutes les fonctions exponentielles, une seule semble avoir 1 pour nombre dérivé en 0. L'existence et l'unicité de cette fonction sont admises. Le nombre e est l'image de 1 par cette fonction.</p> <p>On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$ avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ ($k > 0$), qui sont utilisés dans des domaines variés. La notion générale de composée est hors programme.</p>
<p>Fonction logarithme népérien</p> <p>Relation fonctionnelle.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître la dérivée, les variations et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Résoudre une équation de la forme $x^n = k$ sur $]0; +\infty[$ avec $k \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbf{N}$. 	<p>Pour tout réel $x > 0$, le réel $\ln x$ est l'unique solution de l'équation $e^y = x$, d'inconnue y. On définit ainsi la fonction logarithme népérien.</p>

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p>Convexité</p> <p>Fonction convexe, fonction concave sur un intervalle.</p> <p>Convexité et sens de variation de la dérivée.</p> <p>Point d'inflexion.</p> <p>Positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x$.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Reconnaître graphiquement des fonctions convexes, concaves. • Utiliser le lien entre convexité et sens de variation de la dérivée. • Reconnaître graphiquement un point d'inflexion. 	<p>Une fonction dérivable sur un intervalle I est dite convexe sur cet intervalle si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.</p> <p>On met en évidence ces notions sur les fonctions de référence : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln x$.</p> <p>Le lien entre convexité et sens de variation de la dérivée est conjecturé puis admis.</p> <p>On peut utiliser le signe de la dérivée seconde.</p> <p>Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique traverse sa tangente.</p> <p>On met en évidence cette notion sur la fonction $x \mapsto x^3$.</p>
<p>Intégration</p> <p>Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$ comme aire sous la courbe.</p> <p>Notation $\int_a^b f(x)dx$.</p> <p>Théorème : si f est continue et positive sur $[a, b]$, la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f.</p>		<p>On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie.</p>

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p>Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.</p> <p>Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.</p> <p>Intégrale d'une fonction de signe quelconque.</p> <p>Linéarité, positivité, relation de Chasles.</p> <p>Valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées. • Connaître et utiliser une primitive de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$. • Calculer une intégrale. • Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de deux fonctions positives. 	<p>Une primitive F de la fonction continue et positive f étant connue, on a : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.</p> <p>On fait prendre conscience aux élèves que certaines fonctions comme $x \mapsto e^{-x^2}$ n'ont pas de primitive explicite.</p> <p>La formule $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, est étendue aux fonctions continues de signe quelconque.</p> <p>Les notions d'aire et de moyenne sont illustrées par des exemples issus des sciences économiques.</p>

2. Probabilités et statistiques

On approfondit le travail en probabilités et statistiques mené les années précédentes.

Afin de traiter les champs de problèmes associés aux données continues, on introduit les lois de probabilités à densité. La loi normale permet d'initier les élèves à la statistique inférentielle par la détermination d'un intervalle de confiance d'une proportion à un niveau de confiance de 95 %.

Cette partie se prête particulièrement à l'étude de problèmes issus d'autres disciplines, notamment des sciences économiques et sociales.

Le recours aux représentations graphiques et aux simulations est indispensable.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p>Conditionnement</p> <p>Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée. • Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités. • Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers. 	<p>On représente une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau. On énonce et on justifie les règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés.</p> <p>Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve. Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme, mais la mise en œuvre de cette formule doit être maîtrisée.</p> <p>Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes.</p>
<p>Notion de loi à densité à partir d'exemples</p> <p>Loi à densité sur un intervalle.</p>		<p>Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité. On définit alors une variable aléatoire X, fonction de Ω dans \mathbf{R}, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de \mathbf{R}. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x, y); x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I.</p> <p>Toute théorie générale des lois à densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue.</p>

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p>Estimation</p> <p>Intervalle de fluctuation.</p> <p>Intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95(*).</p> <p>Niveau de confiance.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître, pour n assez grand, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % : $\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ où p désigne la proportion dans la population. • Estimer une proportion inconnue à partir d'un échantillon. • Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95 pour une précision attendue. 	<p>La variable aléatoire qui à tout échantillon de taille n associe la fréquence, prend ses valeurs dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % avec une probabilité qui s'approche de 0,95 quand n tend vers $+\infty$.</p> <p>On admet le résultat ci-contre, qui est conforté grâce à la simulation.</p> <p>En pratique, on considère que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.</p> <p>En majorant $1,96\sqrt{p(1-p)}$, on retrouve l'intervalle de fluctuation présenté en classe de seconde.</p> <p>La problématique de prise de décision, déjà rencontrée, est travaillée à nouveau.</p> <p>Les attendus de ce paragraphe sont modestes et sont à exploiter en lien avec les autres disciplines.</p> <p>On peut énoncer que p est élément de l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ avec un niveau de confiance de plus de 95 %, où f désigne la fréquence observée sur un échantillon de taille n.</p> <p>Il est important de noter que, dans d'autres champs, on utilise l'intervalle $\left[f - 1,96 \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}, f + 1,96 \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \right]$ qu'il n'est pas possible de justifier dans ce programme.</p>

(*) Un intervalle de confiance pour une proportion p au niveau de confiance 0,95 est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95, intervalle aléatoire déterminé à partir de la variable aléatoire F_n , qui à tout échantillon de taille n associe la fréquence.

Les intervalles de confiance considérés ici sont centrés en f .

L'intervalle aléatoire $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient la proportion à estimer avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Algorithmique

En seconde, les élèves ont conçu et mis en œuvre quelques algorithmes. Cette formation se poursuit tout au long du cycle terminal.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés à :

- décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- en réaliser quelques-uns à l'aide d'un tableur ou d'un programme sur calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
- interpréter des algorithmes plus complexes.

Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (algèbre et analyse, statistiques et probabilités, logique), mais aussi avec les autres disciplines ou le traitement de problèmes concrets.

À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.

Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie).

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables :

- d'écrire une formule permettant un calcul ;
 - d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction ;
- ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.

Boucle et itérateur, instruction conditionnelle

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables de :

- programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ;
- programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

Notations et raisonnement mathématiques

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : \in , \subset , \cup , \cap ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A , on utilise la notation des probabilités \overline{A} .

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples à :

- utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles \forall , \exists ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- formuler la négation d'une proposition ;
- utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Classe terminale de la série économique et sociale – enseignement de spécialité

L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme. Plusieurs exemples de problèmes sont donnés à titre indicatif.

L'étude de telles situations conduit à un travail de modélisation et place les élèves en position de recherche. Les thèmes abordés sont particulièrement propices à l'utilisation des outils informatiques (logiciels de calcul, tableur) et à la mise en œuvre d'algorithmes.

Les graphes probabilistes permettent d'étudier des phénomènes d'évolution simples et de faire un lien avec les suites. Les matrices sont présentées comme des tableaux de nombres. Au même titre que les graphes, elles apparaissent comme des outils pour résoudre des problèmes.

Le niveau d'approfondissement des notions est guidé par les besoins rencontrés dans la résolution des problèmes traités. Les thèmes abordés ne doivent pas faire l'objet d'un développement théorique.

Exemples de problèmes	Contenus
<p>Recherche de courbes polynomiales passant par un ensemble donné de points.</p> <p>Gestion de flux, problèmes simples de partitionnement de graphes sous contraintes : problème du voyageur de commerce, gestion de trafic routier ou aérien, planning de tournois sportifs, etc.</p> <p>Modélisation d'échanges inter-industriels (matrices de Léontief).</p> <p>Codage par un graphe étiqueté, applications à l'accès à un réseau informatique, reconnaissance de codes.</p> <p>Minimisation d'une grandeur (coût, longueur, durée, etc.).</p> <p>Phénomènes évolutifs (variation d'une population, propagation d'une rumeur ou d'un virus, etc.).</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Matrice carrée, matrice colonne : opérations. • Matrice inverse d'une matrice carrée. • Graphes : sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, graphe connexe, chaîne eulérienne, matrice d'adjacence associée à un graphe. • Recherche du plus court chemin sur un graphe pondéré connexe. • Graphe probabiliste à deux ou trois sommets : matrice de transition, état stable d'un graphe probabiliste.