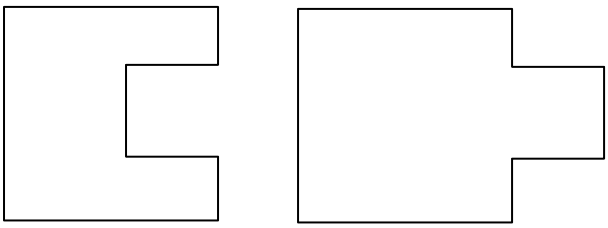
Aire et Périmètre

Dominique BARATAUD (C.N.E.F.E.I)

Introduction : Une question délicate

Tout enseignant de mathématiques a rencontré des apprenants en difficulté dans l'utilisation des formules de calculs de périmètres ou/et d'aires. Et il est classique de voir une personne utiliser une formule de calcul d'aire pour trouver un périmètre (et réciproquement) ou exprimer une aire en m (ou un périmètre en mètres carrés.
Ces erreurs trouvent probablement leur origine dans des confusions s'appuyant sur des perceptions erronées et des représentations archaïques que la pédagogie ne prend peut-être pas suffisamment le temps d'explorer.
Précisons, à partir de quelques exemples, le sens de notre propos.

Notre expérience empirique nous conduit à **confondre** (au sens étymologique) les concepts de Périmètre, de Aire (et même de volume). En effet, dans la plupart des manipulations que nous réalisons sur des objets, ces trois grandeurs croissent (ou décroissent) conjointement. Ainsi, plus un paquet-cadeau est gros (volume) , plus le papier-cadeau pour l'envelopper est grand (Aire) et plus le ruban nécessaire à l'entourer sera long (Périmètre). Intuitivement, nous avons tendance à penser (souvent inconsciemment) que si nous augmentons une surface, le nouveau périmètre augmente aussi (et réciproquement).
Il y a donc une confusion profondément enracinée dans notre expérience empirique d'actions sur le monde ou dans les perceptions immédiates sur certaines figures.
Ainsi dans le cas suivant :



Face aux deux figures ci-contre, la plupart des personnes interrogées considèrent que celle de droite a un périmètre supérieur à celui de la figure de gauche.
Ce qui est faux (les deux périmètres sont égaux).

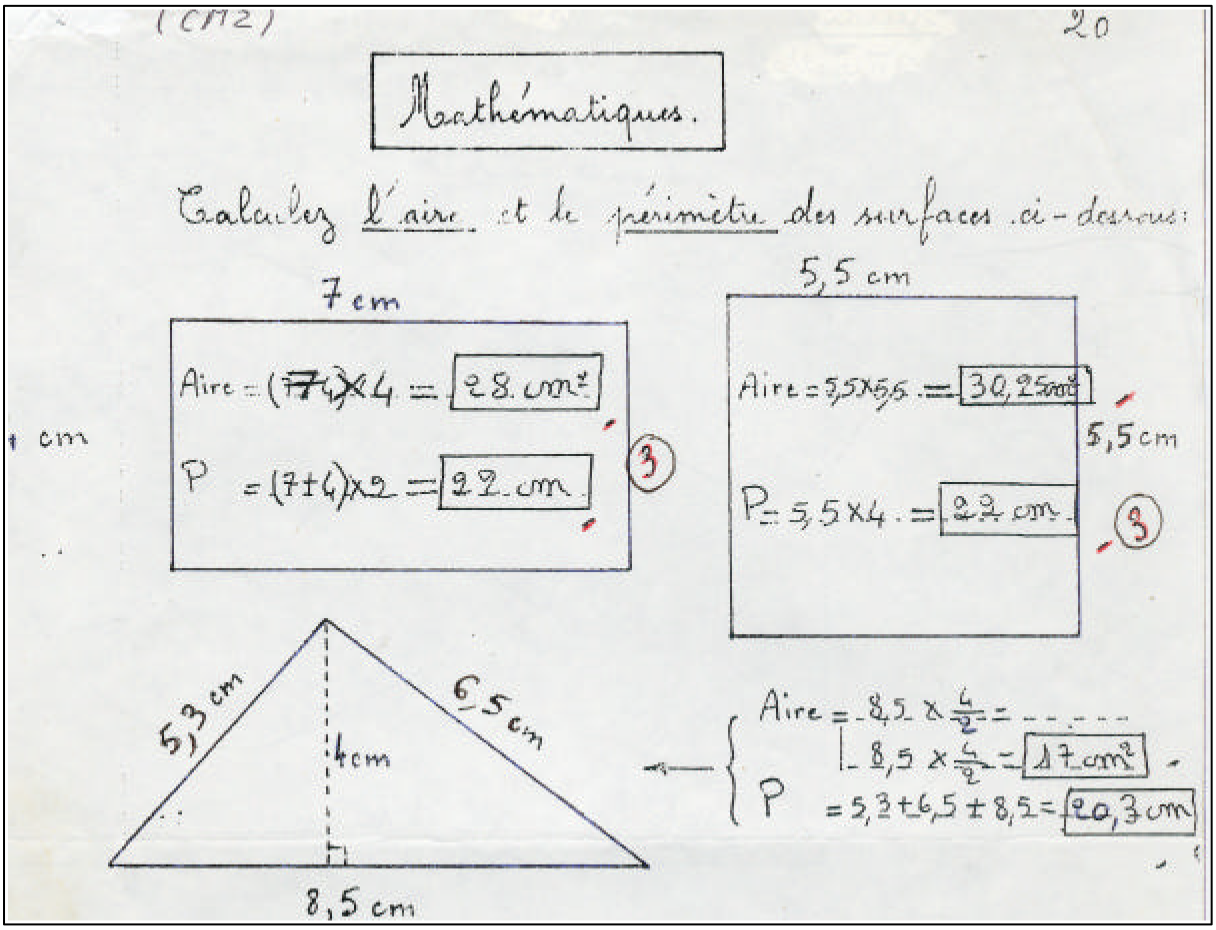
Commentaires :
La figure de gauche est perçue comme un grand carré amputé d'un petit carré, alors que celle de droite est perçue comme un grand carré augmenté d'un petit. Ce qui est exact en terme de décomposition et recomposition. Ce qui est erroné, **c'est le mouvement de pensée qui traduit cette perception en opération** (soustraction ou addition) sur les deux grandeurs périmètre et aire. Car il est vrai qu'à l'addition perceptive des deux formes correspond l'addition des aires mais il n'en est pas de même au niveau des périmètres.
Il faut remarquer que cette "logique" conduit certains sujets à proposer comme calcul du périmètre de la première forme une opération du type :

Périmètre du grand carré – périmètre du petit

et comme calcul du périmètre de la seconde forme une opération du type :

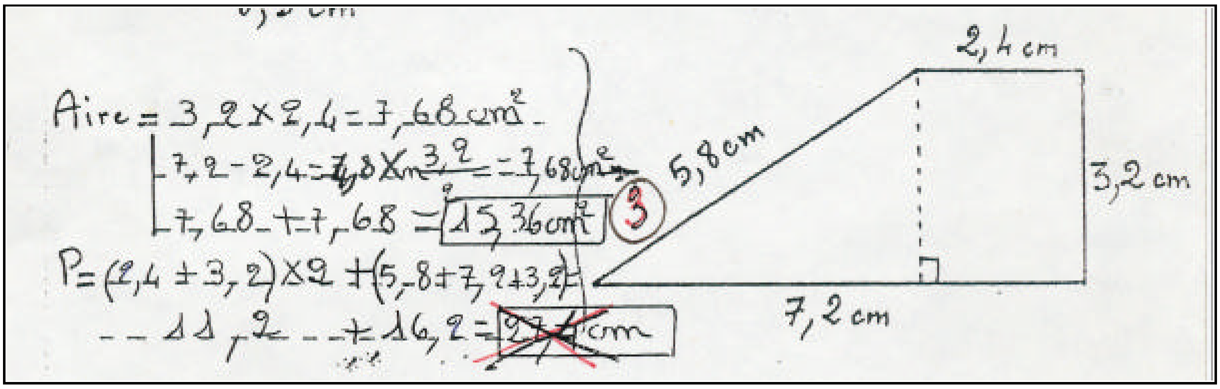
Périmètre du grand carré + périmètre du petit.

Voici par exemple le travail réalisé par une élève de CM2.



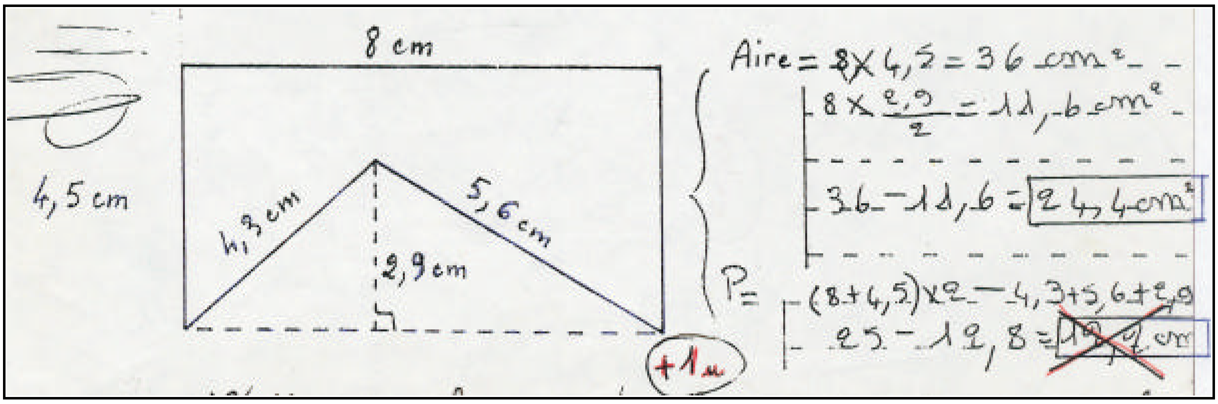
Remarque :
Sur les formes canoniques (Rectangle, Carré et Triangle) la maîtrise de cette élève semble totale.

Suite de son travail :



Remarque :
Face à une figure composée et pensée comme l'adjonction d'un rectangle et d'un triangle, le mode de calcul apparaît comme étant du type :
Aire totale = aire du rectangle + aire du triangle
Périmètre total = périmètre du rectangle + périmètre du triangle.

La dernière partie de son travail est encore plus exemplaire :



Remarque :
Ici la figure est pensée comme étant celle d'un rectangle amputé d'un triangle.
Le mode de calcul du périmètre, que nous reproduisons, mérite d'être analysé.

Traduction opératoire de l'amputation perceptive

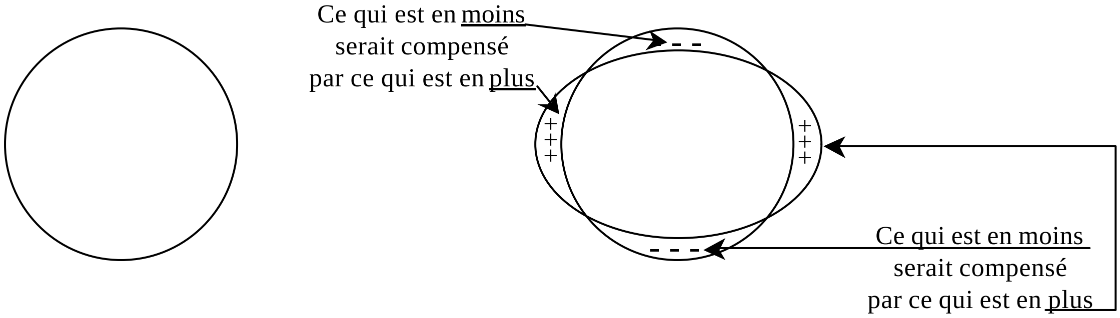
P = (8 + 4,5) x2 – 4,3 + 5,6 + 2,9

25 – 12,8 = 12,2 cm

Somme des éléments caractéristiques de l'amputation. (Il s'agit bien d'une somme ainsi que le prouve le 12,8 de la ligne suivante). Le 2,9 qui ne correspond pas au périmètre du triangle, représente la profondeur, l'importance de l'amputation.

On voit ici à nu **le mouvement de pensée qui traduit la perception en opération.**

Corrélativement, à périmètre constant, nous avons tendance à penser que l'aire ne change pas.
Ainsi, Voltaire (qui n'était pas particulièrement en difficulté d'apprentissage) écrivait :
"La surface d'un cercle ne change pas quand on le transforme en ovale".
Cette erreur (car c'est faux), s'appuie sur des compétences opératoires de haut niveau (Invariance par compensation) qu'un schéma permet de comprendre



Découper, recomposer, une activité authentiquement mathématique.

On le verra, les scénarios pédagogiques que nous proposons dans ce dossier font beaucoup appel à des découpages et à des recompositions de surfaces. La justification de telles pratiques n'est pas à chercher dans des caractéristiques supposées des élèves accueillis en classes-relais mais du côté de l'histoire et des fondements mêmes des mathématiques.

D'Euclide à Hilbert, toute l'histoire de la géométrie démontre l'importance que ces démarches ont occupée (et occupent encore) dans les recherches des plus éminents mathématiciens. Elles ne sont pas le moyen d'échapper à des processus d'abstraction mais sont au contraire au cœur d'interrogations et de recherches fondamentales.

Ainsi, par exemple, la question de la quadrature du cercle (Est-il possible de construire, à la règle et au compas, un carré de même aire qu'un cercle donné ?) fut posée par les Grecs et ne trouva sa solution qu'au 18ème siècle. (La réponse étant qu'une telle construction est impossible). Il en est de même de la construction de la trisectrice d'un angle (partage d'un angle en trois parties égales).

On trouvera dans ce dossier deux articles de niveau différent auxquels le collègue, selon ses propres besoins et connaissances antérieures se reportera :

- Un premier article de notre collègue André PRESSIAT (I.N.R.P.), **Découpages et recompositions pour les aires et volumes,** nécessitant sans doute quelques connaissances préalables et permettant d'explorer un peu l'histoire en mathématiques sur ce sujet.
- Un second article de notre collègue François BOULE (professeur au CNEFEI) **Découpages et recomposition de surfaces,** qui devrait permettre à tous de comprendre en quoi ces questions sont essentielles.

Les étapes de l'apprentissage

Remarque préalable :

Apprentissage initial et apprentissage tardif.

Les étapes décrites ci-dessous sont celles que devraient respecter une démarche d'apprentissage cohérente, ce sont celles qu'auraient dû respecter l'apprentissage initial. Or, il est fort probable que tel n'aura pas été le cas pour la plupart des élèves accueillis en classe-relais, leurs savoirs actuels s'étant construits de façon morcelée et peu cohérente. Il n'en demeure pas moins qu'ils ont des savoirs et qu'il n'est ni possible ni souhaitable de re-parcourir la totalité des étapes ci-dessous décrites. Une pédagogie des apprentissages tardifs doit prendre en compte les savoirs et représentations installés en permettant leur réorganisation et leur reconstruction. Certaines activités visant la construction de savoir dans le cadre d'un apprentissage initial peuvent permettre des prises de conscience et des réorganisations des connaissances propres à une pédagogie des apprentissages tardifs. Il appartient au professeur de choisir les activités pour permettre les acquisitions ou/et les réorganisations dont a besoin l'élève accueilli en classe-relais.

Dissociation des concepts :

Tout apprentissage doit donc, à notre sens commencer par un travail de dissociation des concepts. Ce qui suppose d'explorer des situations où :

- à périmètre constant les aires vont varier (et dans quelles limites),

- à aire constante, les périmètres vont varier (et dans quelles limites)

- le périmètre et l'aire vont varier dans le même sens (ce qui n'est pas surprenant) mais aussi en sens contraire (ce qui est moins conforme à l'intuition).

Voici sous forme d'un tableau l'ensemble des questions à parcourir.

Nature des variations	Périmètre	Constant		+	-	-	+	+	-
	Aire	+	-	Constante		-	+	-	+
Nature des activités		Travail avec de la ficelle		Assemblages d'un nombre constant de pièces. (Cf. Tan Gram)		Variations conjointes		Variations contraires	
		Aire variable		Périmètre variable		Retrait	Rajout	Retrait	Rajout
		Maxi.	Mini.	Maxi.	Mini.	de pièces		de convexités	

Comparer ou/et mesurer

Etudier les variations des périmètres et des aires lors de transformations particulières pose la question des procédures de comparaisons. Le recours trop rapide à des démarches faisant appel aux mesures risque de ne pas favoriser le travail de dissociation des concepts. Il est donc souhaitable, si cela semble nécessaire, de recourir à des procédures de comparaison qui ne fassent pas appel à la mesure.
Pour les périmètres : l'utilisation de ficelles peut permettre facilement des comparaisons directes.
Pour les surfaces, la comparaison directe des aires est plus délicate. Deux cas sont à envisager :

1) Le recouvrement d'une surface par l'autre est possible ;
2) Le recouvrement direct n'est pas possible. Des découpages et des réorganisations sont nécessaires. Ceci suppose que l'idée même d'invariance par découpage et réorganisation des pièces est acquise (Ce qui n'a rien d'évident pour tous les élèves de collège)

On trouvera dans la partie présentant les activités (Fiche 3) , un exemple de fiches qui ont pu être expérimentées avec des élèves de 6$^{\text{ème}}$ de SEGPA. Elles sont à comprendre comme le résultat d'un travail à réaliser et non pas comme des fiches toutes prêtes à distribuer.
Remarque :
L'intérêt d'un jeu comme le Tan Gram, c'est entre autre le fait que le découpage se fait à partir d'une pièce de base engendrant toutes les autres (Le petit triangle isocèle rectangle), ce qui permet, par simple dénombrement, des comparaisons d'aires.

Supports et activités proposées dans ce livret

N°	Objectif	**Nature de l'activité**
1	Dissociation des concepts d'aire et de périmètre	Comparaison de figures selon chacun des critères. Prise de conscience que le classement de la plus petite à la plus grande d'un ensemble de figures dépend du critère retenu
2		Travail à périmètre constant : comparaison selon leur aire de figures ayant même périmètre
3		Travail à aire constante : comparaison selon leur périmètre de figures ayant même aire (Tan Gram)
Evaluation 1		

La question de la mesure

Autant le problème de la mesure des périmètres ne pose que peu de difficultés, autant celui de la mesure des aires est délicat. Plusieurs aspects peuvent être identifiés

L'utilisation d’une unité de mesure :

- Elle doit permettre de couvrir le plan. D'où les activités de pavage :
  - Recherche des formes usuelles permettant le pavage
  - Production, par transformations simples, de pièces originales

Remarquons que ce thème permet des liens intéressants avec le domaine pictural. (Cf. certains tableaux d'Escher)

> Remarques : Exhiber est une chose, exiger en est une autre.
> Or, l'une des formes que les enfants ont tendance à choisir spontanément pour couvrir une surface est le cercle. C'est du reste en s'appuyant sur ce constat que nous proposons certaines activités visant **une approche** de la notion de mesure des surfaces par le remplissage par des cercles. (Cf. Fiche N° 2) Cette méthode permet dans la plupart des cas de comparer les surfaces. L'existence de vides et de cercles n'entrant pas entièrement dans la forme permet justement de faire l'expérience des limites d'une telle approche.
> Il ne suffit donc pas d'exhiber le carré comme la forme exigée. Il faut fonder cette exigence en multipliant les expériences s'appuyant sur d'autres formes.

- Elle doit permettre le remplissage des surfaces à mesurer :
  - ce qui pose la question des transformations des figures usuelles en une forme de base,
  - ce qui pose aussi la question des sous-unités de mesure.

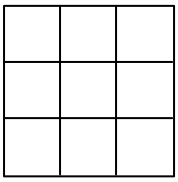
Supports et activités proposées dans ce livret

N°	Objectif	**Nature de l’activité**
4	Approche des notions de mesure d’aires et de périmètres	Expression des caractéristiques des pièces constituant un Tan gram à partir de celles du triangle de base.
5		Utilisation des valeurs obtenues dans l'analyse et la comparaison de différentes figures. (Cas simples)
6		Utilisation des valeurs obtenues dans l'analyse et la comparaison de différentes figures. (Cas complexes)
7a	Vers la construction de formules Travail sur des « planches à clous »	Inventaire des carrés et des rectangles (planche à 9 clous puis à 16 clous)
7b		Inventaire des triangles (planche à 9 clous) et des polygones réguliers (maillage Triangle-Equilatéral)
7c		Expression de différentes formes (Triangles, carrés, parallélogrammes) à partir de 2 triangles de base
7d		Mesure d’aires sur une planche à 16 clous
7e		Construction de la formule de Pick
8a	Prise de conscience que la variation des aires est égale au carré de celles des longueurs	Carrés de dimension double, triple, moitié et tiers. Variation corrélative des aires
8b		Triangles équilatéraux de dimension double, triple, moitié et tiers. Variation corrélative des aires
8c		Sphinx de dimension double, triple, moitié et tiers. Variation corrélative des aires
8d		Découpage d’un sphinx en 16 sphinx
8e		Assemblage d’un sphinx avec 25 sphinx
9	Interlude	Fabrication de formes auto-couvrantes.

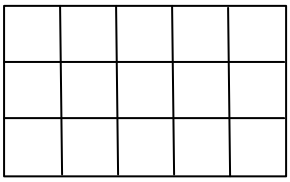
La construction de formules

De ce qui précède, il résulte que :

- certaines formules ne sont que lecture-écriture de ce qui est. C'est le cas du carré (côté × côté) et du rectangle (Longueur × largeur)



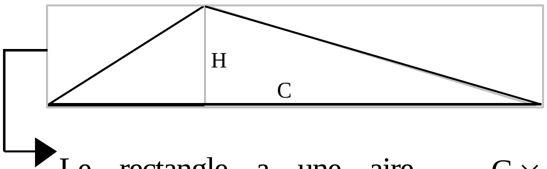
3 rangées de 3 carrés



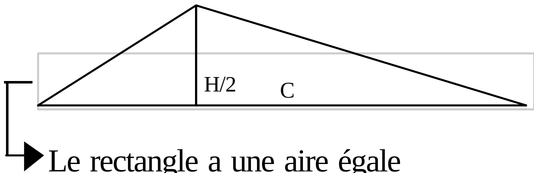
3 rangées de 5 carrés

- d'autres proviennent de transformations réalisables :

C'est le cas du triangle et ce sous deux formes :

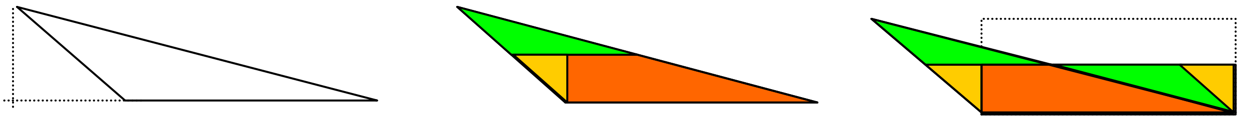


Le rectangle a une aire double de celle du triangle. d'où $\frac{C \times H}{2}$

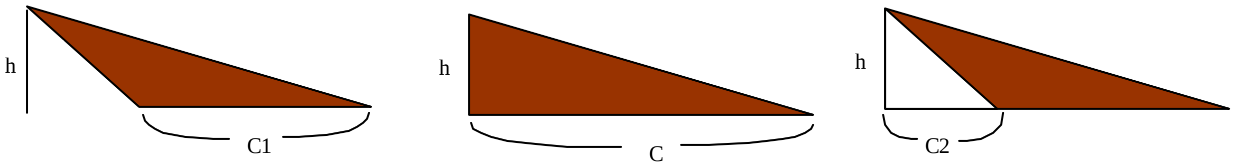


Le rectangle a une aire égale à celle du triangle. d'o $C \times \frac{H}{2}$

Remarque 1 : La transformation est encore réalisable lorsque la hauteur est extérieure au triangle :



Dans ce cas, il est possible d'opérer par différence

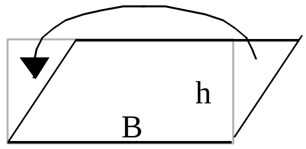


Aire du triangle = ½ C × h – ½ C2 × h = ½ (C-C2) × h = ½ C1 × h

Remarque 2 :

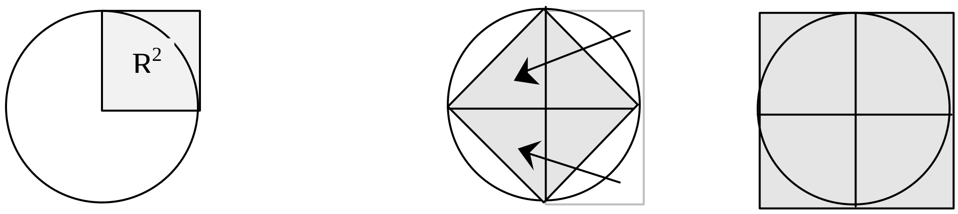
Algébriquement il est équivalent d'appliquer C/2 × H . Mais ceci ne correspond à aucune décomposition-recomposition.

- C'est aussi le cas du parallélogramme :



- Enfin dans le cas du cercle aucune transformation réelle ne peut le transformer en rectangle ou carré (célèbre problème dit de la quadrature du cercle). La formule bien connue (S = $\pi \times R^2$ s'appuie sur des techniques de calculs fondées sur les notions de limites et de calcul infinitésimal). Il est par contre possible (et souhaitable) de montrer que la surface du cercle est comprise entre

2 R^2 et **4 R^2**



et même de développer des procédures d'approche (Cf. Fiche 10e)

Supports et activités proposées dans ce livret

N°	Objectif	Nature de l'activité
10a	Formules	Du triangle au parallélogramme (1)
10b	Aire du triangle,	Du triangle au parallélogramme (2)
10c	du parallélogramme,	Du parallélogramme au rectangle
10d	du disque.	Du rectangle au carré
10e		Activités autour de la quadrature du cercle